ÜBER EINGEBETTETE 2-SPHÄREN IN DREIDIMENSIONALEN MANNIGFALTIGKEITEN

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

BÄRBEL WICHA

Bochum 1981

Über eingebettete 2-Sphären in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

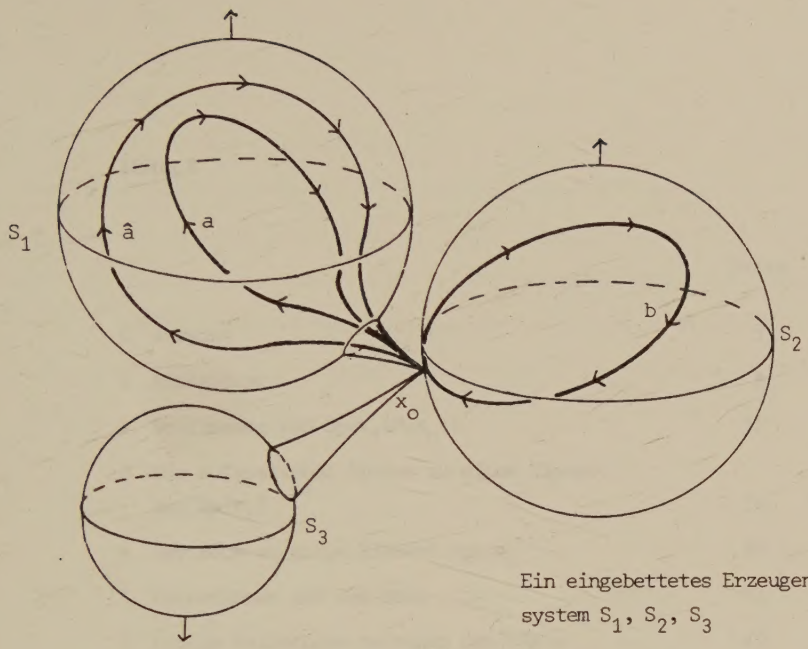
Bärbel Wicha

Bochum 1981

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

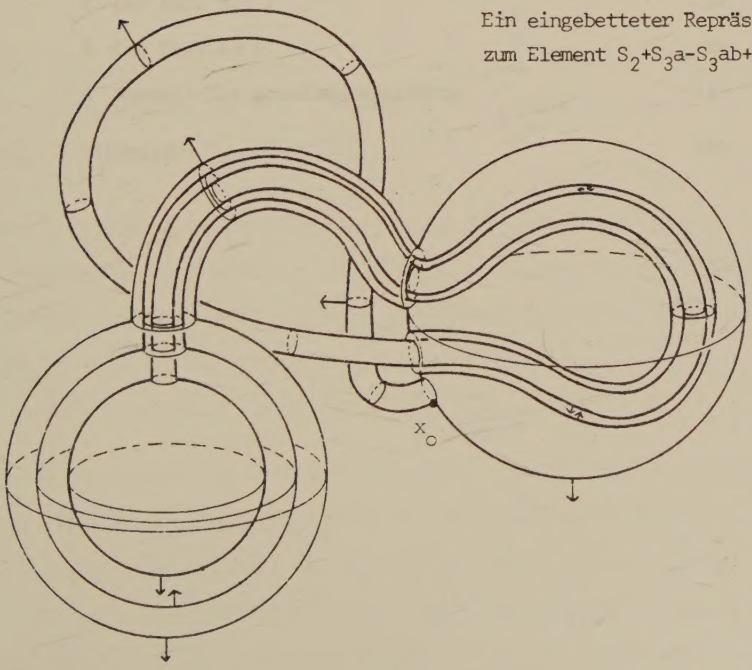
Dissertation eingereicht am: 4.09.1981
Tag der mündlichen Prüfung: 11.12.1981

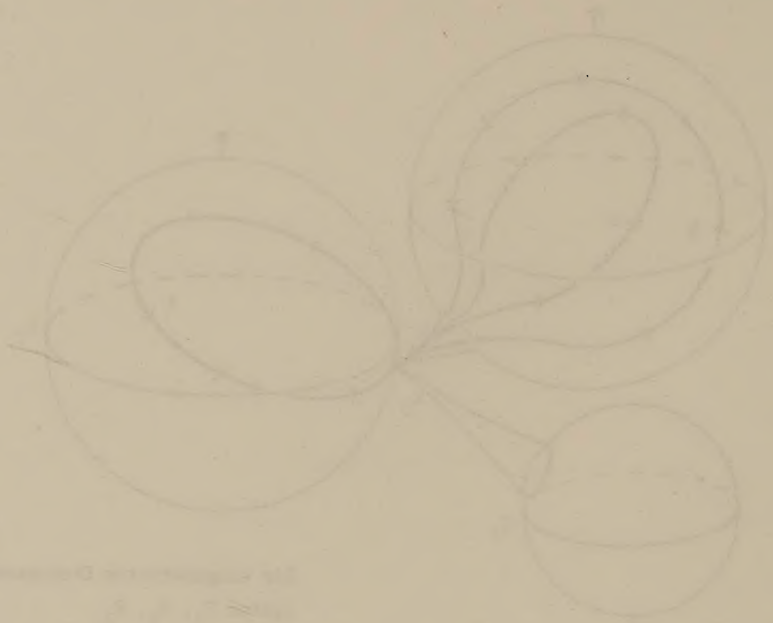
Referent: Prof. Dr. H. Zieschang
Korreferent: Prof. Dr. G. Wassermann



Ein eingebettetes Erzeugendensystem S_1, S_2, S_3

Ein eingebetteter Repräsentant zum Element $S_2+S_3a-S_3ab+S_3ab\hat{a}$



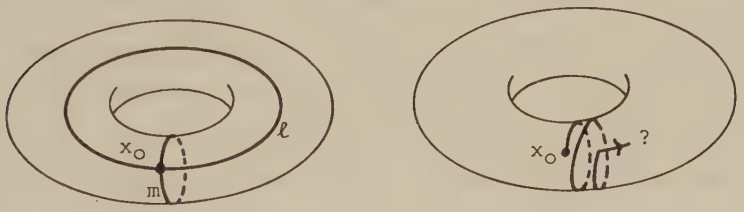


Inhalt

		Seite
0	Vorwort	1
1	Einleitung	8
2	Bestimmung von $Sp(\pi_1(M,x_o))$	12
3	Die aufspaltende Sphäre zu einem Element von $Sp(\pi_1)$	18
4	Der Baum zu einem Element von π_2	30
5	Operationen auf dem Baum	43
6	Einige Relationen zwischen den FRK's	49
7	Der Fall n = 3	53
8	Der Fall n > 3	84
9	Anhang: Die grundlegenden Sätze	134
	Literatur	150

0. Vorwort

Betrachtet man eine zweidimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit M^2, so kann man sich die Frage stellen, welche Elemente von $\pi_1(M^2,x_o)$ durch eine Einbettung realisierbar sind. Man findet, daß z.B. auf dem Torus $S^1 \times S^1$ ein eingebettetes Erzeugendensystem m,ℓ (Meridian und Längskreis) von $\pi_1 = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ existiert, jedoch das Element $2m$ nicht durch eine Einbettung realisierbar ist:

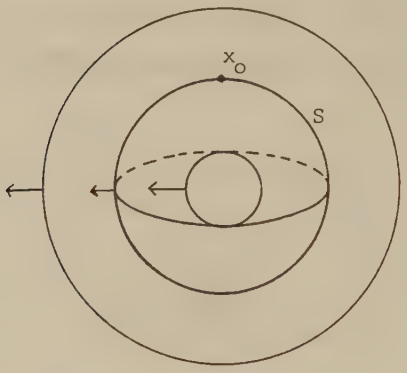


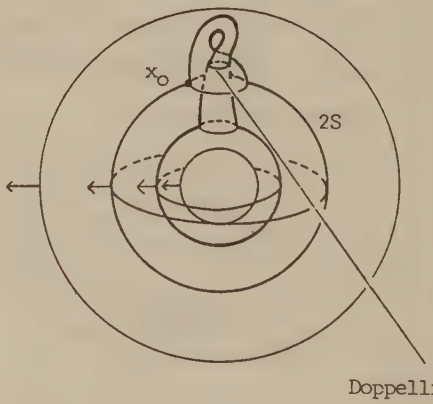
Eine Lösung des Problems findet man in [Z] bzw. [C], wo mit algebraischen bzw. geometrischen Methoden untersucht wird, welche Elemente von $\pi_1(M^2,x_o)$ durch Einbettungen realisierbar sind.

In einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit M^3 hingegen bereitet es keine Schwierigkeiten, Elemente aus $\pi_1(M^3,x_o)$ zu realisieren, da - grob gesprochen - genügend Raum zum Abheben von Doppelpunkten vorhanden ist. Hier stellt sich die gleiche Frage für die zweite Homotopiegruppe, und diesem Problem ist die vorliegende Arbeit gewidmet.

Im Gegensatz zur Dimension zwei sind jedoch weder sämtliche geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten, noch ihre Fundamentalgruppen bekannt. Die zweite Homotopiegruppe ist als abelsche Gruppe im allgemeinen (außer $M \simeq S^2 \times S^1$) nicht endlich erzeugt. Berücksichtigt man aber die Operation von π_1 auf π_2, so findet man (vgl. [S]) $\pi_2(M^3,x_o)$ als $\mathbf{Z}(\pi_1)$-Modul

von nur endlich vielen Elementen erzeugt, welche nach [E] durch disjunkte Einbettungen realisierbar sind. Wie beim Torus zeigt sich (Satz 9.7), daß z.B. in $S^2 \times S^1$ das Element $S := S^2 \times \{0\}$ nicht aber $2S$ durch eine Einbettung realisierbar ist.





(Die äußere und die innere Sphäre sind mittels eines orientierungsändernden Homöomorphismus zu identifizieren, so daß eine orientierbare Mannigfaltigkeit entsteht.)

In der vorliegenden Arbeit werden 3-dimensionale geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeiten betrachtet, die die Poincaré'sche Vermutung erfüllen (d.h. jede nullhomotope Sphäre berandet einen Ball) und deren Fundamentalgruppe das freie Produkt aus mindestens 2 frei-unzerlegbaren Faktoren (ungleich $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}_2$) ist. Es wird ein Verfahren (Theorem 3.4) angegeben, mit dem man zu einem vorgegebenen Erzeugendensystem und der zugehörigen Zerlegung von π_1 (vgl. Satz 9.2) sämtliche eingebetteten Elemente von π_2 konstruieren kann. Damit ist das Problem, die einbettbaren Elemente von π_2 zu bestimmen, prinzipiell gelöst, jedoch kann man keine Beschreibung der bei dem Verfahren auftretenden $(n \times n)$-Koeffizien-

ten-Matrizen mit $\mathbb{Z}(\pi_1)$-Einträgen gewinnen.

Leicht nachzuprüfen sind hingegen die in Korollar 3.5 und 3.6 angegebenen notwendigen Kriterien, für die man nur den Augmentierungshomomorphismus $\alpha: \mathbb{Z}\pi_1 \to \mathbb{Z}$ bzw. die Homomorphismen $\alpha_j: \mathbb{Z}\pi_1 \to \mathbb{Z}\pi_1(G_j \to 1)$ auf den $\mathbb{Z}\pi_1$-Koeffizienten einer vorgegebenen Sphäre auswerten muß.

Der Rest der Arbeit ist dem Ziel gewidmet, einen Algorithmus zu entwickeln, mit dem man entscheiden kann, welche Elemente von π_2 durch Einbettungen realisierbar sind. Dieses Problem ist vollständig gelöst (Theorem 7.8 und 7.11) für Mannigfaltigkeiten, deren Fundamentalgruppe aus 3 unzerlegbaren, unendlichen freien Faktoren ($\neq \mathbb{Z}$) besteht. Darüber hinaus erhält man (Korollar 7.10) in diesem Fall ein leicht nachprüfbares, wesentlich stärkeres notwendiges Kriterium als das in 3.5 gegebene. Es zeigt sich nämlich, daß nicht nur Elemente $k \cdot S$ für $k \neq 0, \pm 1$ (wie im Fall $S^2 \times S^1$) nicht durch Einbettungen realisierbar sind, sondern auch Elemente, in deren $\mathbb{Z}\pi_1$-Koeffizienten Terme der Form kw mit $w \in \pi_1$ und $k \neq 0, \pm 1$ vorkommen. Ferner liefert der Algorithmus (Korollar 7.12) die von einem einbettbaren Element induzierte Zerlegung von $\pi_1(M, x_o)$, stellt also eine Spezifizierung des Satzes von Kneser-Stallings (vgl. [H]) dar.

Um diesen Algorithmus auf Mannigfaltigkeiten, deren Fundamentalgruppe ein freies Produkt aus mehr als 3 Faktoren ist, zu verallgemeinern, müßte man zunächst das Normalformproblem für eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\pi_1)$, die Gruppe der Fouxe-Rabinowitsch-Konjugationen (FRK's), lösen. Da selbst diese Untergruppe durch unendlich viele Erzeugende und Relationen beschrieben wird, erweist sich das als schwierig. (Die Bestimmung einer Normalform ist der erste Schritt zur Lösung des Wortproblems in einer Gruppe.)

Daher werden einschränkende Annahmen über die zu betrachtenden Folgen von FRK's gemacht (Annahme 8.3). Die zugehörigen Zerlegungen bzw. erzeugenden Sphären können dann mit einem Algorithmus ähnlich dem in 7.8 beschriebenen bestimmt werden (Theorem 8.14 und Korollar 8.15). Wieder erhält man die von dieser Sorte von eingebetteten Sphären induzierte Zerlegung von π_1 (Korollar 8.16).

In den einzelnen Kapiteln werden folgende Themen behandelt:

Kapitel 1: Wesentlich für die Argumentation in der Arbeit ist der Satz von Laudenbach (Satz 1.4 und 1.5), der eine Beziehung zwischen Homotopieklassen von Sphären und gleichen Zerlegungen von π_1 in ein freies Produkt herstellt. Erfüllt die betrachtete Mannigfaltigkeit die Poincaré'sche Vermutung und enthält π_1 keinen freien Faktor $\mathbb{Z}_2$, so gibt es eine Bijektion zwischen den Aufspaltungen von π_1 in ein freies Produkt ($Sp(\pi_1)$) und Homotopieklassen modulo x_o von eingebetteten Sphären ($E_2(M,x_o)$).

Kapitel 2: Es stellt sich heraus, daß $Sp(\pi_1)$ einer Untergruppe der Automorphismengruppe von π_1 entspricht, und zwar der Untergruppe der Fouxe-Rabinowitsch-Konjugationen (FRK's, vgl. 2.4). Ein Teil der in $Aut(\pi_1) = Aut(G_1 * \ldots * G_n)$ (diese Gruppe wird in [F-R] vollständig beschrieben) geltenden Relationen wird in 2.6 zitiert, ferner werden einige technische Lemmata bewiesen.

Kapitel 3: Hier wird der Erzeugendenwechsel von π_2 untersucht, wenn die Zerlegung von π_1 durch eine Folge von FRK's abgeändert wird. Dieser Erzeugendenwechsel wird durch eine $(n \times n)$-Matrix mit $\mathbb{Z}\pi_1$-Einträgen beschrieben (Satz 3.3), die sich durch eine etwas modifizierte Matrizenmultiplikation aus den in 3.2 beschriebenen Grundtypen von Matrizen be-

rechnen läßt. Man erhält so alle Koeffizienten von eingebetteten Elementen aus π_2 (Theorem 3.4), sowie notwendige Kriterien für die Existenz einer Einbettung (Korollar 3.5 und 3.6).

Kapitel 4: Jeder Globalkonjugationsklasse von Elementen aus π_2 wird ein vollständig reduzierter Baum zugeordnet (Definition 4.1, 4.2 und 4.11), dessen Länge nur von dieser Klasse abhängt (Korollar 4.14). Es werden außerdem noch Prozesse angegeben, mit denen sich die vollständig reduzierten Bäume zu einer Globalkonjugationsklasse von Elementen aus π_2 ineinander überführen lassen (4.14.1 und 4.14.2).

Kapitel 5: An dem in Kapitel 4 eingeführten Baum kann man die Veränderung der Sphäre nachvollziehen, die dem Übergang von einer Zerlegung von π_1 zu einer anderen, induziert durch eine Folge von FRK's,entspricht. Zu jeder einzelnen FRK gehören Operationen auf dem Baum (Satz 5.1).

Kapitel 6: Da für die Frage der Einbettbarkeit von Elementen aus π_2 Globalkonjugationen des gesamten Sphärensystems keine Rolle spielen (Bemerkung 6.2), kann man für die FRK's eine weitere Relation finden, die modulo Automorphismen in den Faktoren und Globalkonjugationen gilt (Lemma 6.5). Daraus folgt, daß es für die Zerlegung von π_1 in zwei frei-unzerlegbare Faktoren ($\neq \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}_2$) nur Globalkonjugationen gibt. Das bedeutet, daß man in diesem Fall sämtliche eingebetteten Elemente von π_2 angeben kann (Theorem 6.7). Dieses Ergebnis wurde bereits in [W] mit rein geometrischen Methoden, ohne Verwendung des Satzes von Fouxe-Rabinowitsch gezeigt.

Kapitel 7: Im Fall n = 3 (d.h. π_1 besteht aus 3 unzerlegbaren freien Faktoren $\neq \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}_2$) kann man mit Hilfe der in Kapitel 6 abgeleiteten Relation eine Normaldarstellung für Folgen von FRK's konstruieren (Lemma 7.2). Diese Normaldarstellung hat die Eigenschaft, aus einer Silbe entstandene Wörter ständig zu verlängern (Länge bedeutet Silbenlänge), Lemma 7.3. Damit kann man zeigen, daß der zur Sphäre S_1 gehörende vollständig reduzierte Baum durch jede einzelne FRK aus einer gemäß 7.2 konstruierten Folge verlängert wird (Satz 7.5). Die Länge des Baumes ist das Maß, mit dem man den gewünschten Algorithmus konstruieren kann, denn alle vollständig reduzierten Bäume zu einer Konjugationsklasse von Sphären haben nach 4.14 die gleiche Länge, und es gibt nur endlich viele FRK's, bei denen man auf eine Verkürzung des Baumes hoffen kann (Korollar 7.7). Die den Algorithmentypen 7.8 und 7.10 zu Grunde liegende Idee wird am Anfang dieses Kapitels ausführlich beschrieben (7.1). Der in 7.8 formulierte Algorithmus läßt sich mit Hilfe der Tatsache, daß sämtliche Gewichte eines zu einer Einbettung gehörenden Baumes von bestimmter Form sein müssen (Satz 7.9), wesentlich vereinfachen, wenn man die Prozesse 4.14.1 und 4.14.2 berücksichtigt (Theorem 7.11). Darüber hinaus liefert Satz 7.9 ein leicht nachprüfbares notwendiges Kriterium für die Einbettbarkeit einer Sphäre (Korollar 7.10) und man erhält aus 7.8 oder 7.11 sogar die von einem einbettbaren Element induzierte Zerlegung von π_1 (Korollar 7.12).

Kapitel 8: Unter der einschränkenden Annahme 8.3 für die Folge der FRK's kann man auch im allgemeinen Fall (n > 3) zeigen, daß ursprünglich aus einer Silbe bestehende Wörter ständig länger werden (Lemma 8.7), und daß der aus dem Baum zu S_1 entstehende Baum sich bei jeder FRK verlängert (Satz 8.9). Dies läßt sich verallgemeinern auf Bäume, die aus dem

Baum zu $S_{k_1}+\ldots+S_{k_\ell}$ entstanden sind (Korollar 8.12). Der so erzeugte Baum liefert ein notwendiges Kriterium für Sphären, die durch eine Folge von FRK's der Form 8.3 aufgebaut wurden (Korollar 8.15). Wenn man von den in 8.1 beschriebenen Unterschieden absieht, verläuft die Argumentation in diesem Kapitel wie in Kapitel 7, auch hier ist die Länge des Baumes das Maß, welches die Konstruktion eines Algorithmus ermöglicht (Theorem 8.14). Die invertierte Folge der FRK's, die zu der Verkürzung des Baumes bis hin zu $BP\cdot(G_{k_1}\ldots G_{k_\ell})$ führte, ergibt die von der betrachteten Sphäre induzierte Zerlegung von π_1 (Korollar 8.16).

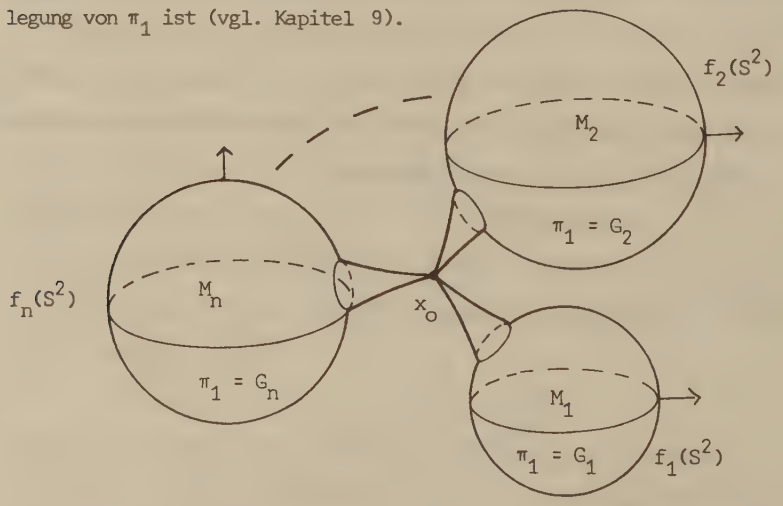
Kapitel 9: Dieses Kapitel stellt eine Zusammenfassung der bereits in [W] behandelten Sätze dar, sofern sie für die Argumentation dieser Arbeit benötigt werden.

Ich möchte Herrn Prof. Dr. H. Zieschang für die Betreuung dieser Arbeit und für anregende Gespräche danken. Ferner halfen mir Diskussionen mit Herrn Dr. R. Strebel und Prof. Dr. G. Wassermann.

1. Einleitung

Wir geben einen kurzen Überblick über die Sätze und Definitionen, die für die Argumentation wichtig sind (näheres in Kapitel 9).

Im folgenden sei M eine dreidimensionale, geschlossene, orientierbare Mannigfaltigkeit mit fest gewähltem Basispunkt x_o. Mit π_1 bzw. π_2 ist stets $\pi_1(M,x_o)$ bzw. $\pi_2(M,x_o)$ gemeint. Die Fundamentalgruppe sei das freie Produkt $G_1 * \ldots * G_n$ von mindestens zwei frei-unzerlegbaren Faktoren, die nicht unendlich zyklisch sein sollen. Dann wird π_2 als $\mathbb{Z}\pi_1$-Modul erzeugt von Homotopieklassen $[f_1]$, $[f_2]$, ..., $[f_n]$, wobei die $f_i: (S^2,*) \to (M,x_o)$ für $i = 1,\ldots,n$ Einbettungen sind, deren Orientierung so gewählt sei, daß von $f_i(S^2)$ die Teilmannigfaltigkeit M_i abgespalten wird, deren Fundamentalgruppe der Faktor G_i in der Produktzerlegung von π_1 ist (vgl. Kapitel 9).



(Die Orientierung wird durch die Angabe einer positiven Normalen festgelegt.)

Im folgenden werden wir die Homotopieklasse [f] und $f'(S^2)$ kurz mit S bezeichnen, wenn in [f] die Einbettung f' liegt und keine Verwechslung möglich ist.

1.1 DEFINITION

Sei $\pi_1 = A * B$ eine Aufspaltung von π_1 in ein nichttriviales freies Produkt. Eine Einbettung $f: (S^2,*) \to (M,x_o)$ *realisiert diese Aufspaltung*, wenn $f(S^2)$ die Mannigfaltigkeit M in zwei Teilmannigfaltigkeiten M_1 und M_2 zerlegt, deren Fundamentalgruppen A und B sind. (Hierbei soll A im *Innern* von $f(S^2)$ und B außerhalb liegen, d.h. die positive Normale von $f(S^2)$ zeigt nach M_2 hinein.)

1.2 BEMERKUNG

1.2.1 Die Aufspaltung $B * A$ wird von $-S$ realisiert, wenn S die Aufspaltung $A * B$ realisiert.

1.2.2 Die Aufspaltung $G_i * (G_1 * \ldots * \overset{\vee}{G_i} * \ldots * G_n)$ wird von S_i realisiert.

1.2.3 Die Aufspaltung $(G_{k_1} * \ldots * G_{k_\ell}) * (G_{k_{\ell+1}} * \ldots * G_{k_n})$ wird von $S_{k_1} + \ldots + S_{k_\ell}$ bzw. $-(S_{k_{\ell+1}} + \ldots + S_{k_n})$ realisiert.

(Die oben niedergeschriebenen Klassen enthalten nach Satz 9.3 stets Einbettungen.)

1.3 BEZEICHNUNG

Die Aufspaltungen von π_1 in $A_1 * B_1$ bzw. $A_2 * B_2$ werden als *gleich* bezeichnet, wenn $A_1 = A_2$ und $B_1 = B_2$ ist (nicht wenn $A_1 \cong A_2$ und $B_1 \cong B_2$!).

Die beiden folgenden Sätze stellen eine Beziehung her zwischen Aufspaltungen von π_1 und Homotopieklassen von Sphären.

1.4 SATZ

Seien f_1, f_2: $(S^2,*) \to (M,x_o)$ zwei Einbettungen, die π_1 in $A_1 * B_1$ bzw. $A_2 * B_2$ aufspalten, dann gilt:

Sind die beiden Aufspaltungen gleich (d.h. $A_1 = A_2$ und $B_1 = B_2$), so sind f_1 und f_2 mod * homotop, also $[f_1]=[f_2]$.

BEWEIS

[L] Kapitel IV, Satz 3.1.

□

1.5 SATZ

M erfülle zusätzlich die Poincaré'sche Vermutung und es sei $A_i, B_i \neq \mathbb{Z}_2$ für i = 1, 2, dann gilt: Ist $[f_1]=[f_2]$, so ist $A_1 = A_2$ und $B_1 = B_2$.

BEWEIS

[L] Kapitel IV, Satz 3.2 und 4.1

□

Von nun an setzen wir zusätzlich voraus, daß M die Poincaré'sche Vermutung erfüllt und π_1 keinen freien Faktor isomorph zu $\mathbb{Z}_2$ enthält, dann gibt es eine Bijektion:

$$E_2(M,x_o) \leftrightarrow Sp(\pi_1(M,x_o)) ,$$

wobei $Sp(\pi_1(M,x_o))$ die Menge aller nichttrivialen Aufspaltungen von π_1

in ein freies Produkt und $E_2(M,x_o) \subset \pi_1(M,x_o)$ die Menge aller Elemente von π_2 bezeichnet, die durch eine Einbettung realisierbar sind. Da unendlich zyklische Faktoren in π_1 ausgeschlossen sind, gibt es nur zerlegende Einbettungen. (Wäre eine Einbettung S nicht-zerlegend, so erhielte man die Fundamentalgruppe von M aus der, der an S aufgeschnittenen Mannigfaltigkeit M', durch Hinzufügung eines neuen Erzeugenden t, welches die beiden Randkomponenten von M' verbindet. Für dieses Erzeugende gelten keine neuen Relationen, da die beiden Randkomponenten von M' als Kopien von S einfach zusammenhängend sind, daher erzeugt t eine unendlich zyklische Untergruppe von $\pi_1(M)$.) Bestimmt man die Elemente von $Sp(\pi_1)$ und die durch die Bijektion gegebene Zuordnungsvorschrift, so kennt man alle durch Einbettungen realisierbaren Elemente von π_2. Dieser Aufgabe sind die Kapitel 2 und 3 gewidmet.

2. Bestimmung von $Sp(\pi_1(M,x_0))$:

Wir zeigen, daß die verschiedenen Aufspaltungen von π_1 einer Untergruppe der Automorphismengruppe von π_1 entsprechen und bestimmen diese.

2.1 SATZ

Ist $A*B = \pi_1 = G_1 * \ldots * G_n$ eine Aufspaltung von π_1, so gibt es einen Automorphismus von π_1, der $(G_{k_1} * \ldots * G_{k_\ell})$ auf A und $(G_{k_{\ell+1}} * \ldots * G_{k_n})$ auf B abbildet, wobei $k_1,\ldots,k_n$ eine Permutation der Zahlen $1,\ldots,n$ ist.

BEWEIS

Es läßt sich A zerlegen in $A_1 * \ldots * A_\ell$ und B in $B_{\ell+1} * \ldots * B_m$ mit unzerlegbaren Faktoren A_i und B_j. Dann gilt nach [ZVC] Satz 2.3.14 (Anwendung des Satzes von Kurosch auf A_i, $B_j \subset \pi_1$), daß $m = n$ und $A_i \cong G_{K_i}$, sowie $B_j \cong G_{k_j}$ mit einer Permutation $\begin{pmatrix} k_1 \ldots k_n \\ 1 \ldots n \end{pmatrix}$ ist. Zusammengesetzt erhält man den gewünschten Automorphismus.

□

Es läßt sich also $Sp(\pi_1)$ ermitteln, indem man $Aut(\pi_1)$ auf $G_1 * \ldots * G_n$ anwendet, eventuell eine Permutation durchführt, und nach der i-ten Stelle spaltet. Wie wir später sehen werden, reicht es, die Abspaltung eines unzerlegbaren Faktors zu untersuchen (vgl. Kapitel 3).

Es bleibt $Aut(\pi_1)$ zu bestimmen, wobei man zunächst einige Typen von offensichtlichen Automorphismen erkennen kann:

2.2 AUTOMORPHISMEN INNERHALB DER FAKTOREN

Für jedes i sei $\Phi_i \cong \text{Aut } G_i$ die Untergruppe von Aut π_1, die folgende Wirkung hat:

$$\phi_i(g_j) := \begin{cases} \phi_i(g_i), & \text{falls } j = i \\ g_j, & \text{sonst} \end{cases}$$

2.3 ABBILDUNG ISOMORPHER FAKTOREN AUFEINANDER

Es sei $\chi: G_i \to G_j$ ein Isomorphismus, dann werde $\omega_{ij} \in \text{Aut } \pi_1$ wie folgt definiert:

$$\omega_{ij}(g_k) := \begin{cases} g_k, & \text{falls } k \neq i,j \\ \chi(g_i), & \text{falls } k = i \\ \chi^{-1}(g_j), & \text{falls } k = j \end{cases}$$

Die ω_{ij} erzeugen eine Untergruppe Ω von Aut π_1.

2.4 KONJUGATION EINES FREIEN FAKTORS

Sei $g_j \in G_j$ und $j \neq i$, dann definiert man:

$$c_{G_i}(g_j)(g_k) := \begin{cases} g_k, & \text{falls } k \neq i \\ g_j^{-1} g_i g_j, & \text{falls } k = i \end{cases}$$

Die $c_{G_i}(g_j)$ erzeugen eine Untergruppe $A_{ij} \cong G_j$ von Aut π_1.

2.5 SATZ

Die Φ_i, A_{ij} und Ω erzeugen Aut π_1.

BEWEIS

[F-R] bzw. [J]. Der Beweis benutzt im wesentlichen die Längenfunktion im freien Produkt.

□

In [F-R] bzw. [J] werden auch sämtliche Relationen angegeben, von denen hier jedoch nur die später noch benutzten zitiert werden.

2.6 LEMMA

In Aut π_1 gelten folgende Relationen (es sei $g_k \in G_k$ stets):

2.6.1 $c_{G_i}(g_j) \circ c_{G_k}(g_\ell) = c_{G_k}(g_\ell) \circ c_{G_i}(g_j)$, falls $i,j \neq k$ und $\ell \neq i$.

2.6.2 $[c_{G_i}(g_j) \circ c_{G_k}(g_j)] \circ c_{G_i}(g_k) = c_{G_i}(g_k) \circ [c_{G_i}(g_j) \circ c_{G_k}(g_j)]$.

2.6.3 $[c_{G_i}(g_j) \circ c_{G_k}(g_j)] \circ c_{G_k}(g_i) = c_{G_k}(g_i) \circ [c_{G_i}(g_j) \circ c_{G_k}(g_j)]$.

In den Relationen 2.6.1, 2 und 3 stellen verschiedene Indizes auch verschiedene Zahlen dar.

2.6.4 $\phi_i \circ c_{G_k}(g_i) = c_{G_k}(\phi_i(g_i)) \circ \phi_i$ und $\phi_i \circ c_{G_k}(g_j) = c_{G_k}(g_j) \circ \phi_i$ falls $j \neq i$.

2.6.5 $\omega_{ij} \circ c_{G_k}(g_\ell) = c_{G_k}(g_\ell) \circ \omega_{ij}$, falls alle Indizes verschieden,

$\omega_{ij} \circ c_{G_i}(g_k) = c_{G_j}(g_k) \circ \omega_{ij}$ und $\omega_{ij} \circ c_{G_k}(g_i) = c_{G_k}(\chi(g_i)) \circ \omega_{ij}$,

wenn $\chi\colon G_i \to G_j$ zu ω_{ij} gehörte, sowie

$\omega_{ij} \circ c_{G_j}(g_k) = c_{G_i}(g_k) \circ \omega_{ij}$ und $\omega_{ij} \circ c_{G_k}(g_j) = c_{G_k}(\chi^{-1}(g_j)) \circ \omega_{ij}$.

BEWEIS

Nachrechnen auf einem Erzeugendensystem von π_1. □

2.7 BEMERKUNG

Man kann mit Hilfe der Relationen aus Lemma 2.6 die Automorphismen von π_1 auf folgende Normalform bringen: $c_k \circ \ldots \circ c_1 \circ$ (Produkt von ω_{ij} und ϕ_k), wobei die c_j von der Form $c_{G_{k(j)}}(g_{i(j)})$ sind.

Da die ω_{ij} einer Umnumerierung der Faktoren, kombiniert mit einem Automorphismus innerhalb der betroffenen Faktoren entsprechen, und Automorphismen innerhalb einzelner Faktoren die Zerlegung nicht verändern (es ist $\phi_k(G_k) = G_k$ für $\phi_k \in \mathrm{Aut}\, G_k$), können wir für die weiteren Überlegungen von der Untergruppe $\bigcup_{i \neq j} A_{ij}$ von Aut π_1 ausgehen. Ihre Elemente werden wir als Fouxe-Rabinowitsch-Konjugationen (kurz FRK's) bezeichnen.

Die FRK's werden stets in der Form $c_{G_i}(g_j)$ angegeben, nach der Durchführung von $c_{G_i}(g_j)$ hat man aber folgende Zerlegung: $G_1 * \ldots * g_j^{-1} G_i g_j * \ldots * G_n$. Ist die nächste Konjugation von der Form $c_{G_1}(g_i)$, so ist das zwar eine FRK bezüglich der Zerlegung $G_1 * \ldots * G_n$, nicht aber bezüglich $G_1 * \ldots * g_j^{-1} G_i g_j * \ldots * G_n$, da die Gruppe G_i, aus der g_i stammt, nicht mehr als freier Faktor vorkommt. Für die weiteren Betrachtungen erweist es sich jedoch als nützlich, eine Folge von FRK's so umzuschreiben, daß jede Konjugation eine FRK bezüglich der vorangehenden Zerlegung ist.

2.8 SATZ

Sei $G_1 * \ldots * G_n \xrightarrow{c_1} \ldots \xrightarrow{c_m} H_1 * \ldots * H_n$ eine Folge von FRK's, dann gibt es eine Folge von Automorphismen $k_1 \circ \ldots \circ k_m$: $G_1 * \ldots * G_n \to H_1 * \ldots * H_n$,

mit der gleichen Wirkung, in der jedes k_i FRK bezüglich ihres Urbildes ist. Im einzelnen haben die k_i folgende Form:

$$k_m = c_m$$

$$k_\ell = c_{k_{\ell+1} \circ \ldots \circ k_m(G_{i_\ell})}\,(k_{\ell+1} \circ \ldots \circ k_m(g_{i_\ell}))$$

wenn c_ℓ die Form $c_{G_{j_\ell}}\,(g_{i_\ell})$ hatte.

BEWEIS

Vollständige Induktion nach der Anzahl m der FRK's in der Folge.

m = 1: $c_1 = k_1$ und man ist fertig.

m > 1: Wir betrachten folgende Situation:

$$G_1 * \ldots * G_n \xrightarrow{c_1} \cdots \xrightarrow{c_m} w_1^{-1} G_1 w_1 * \ldots * w_n^{-1} G_n w_n$$

$$\xrightarrow{c_{m+1} = c_{G_1}(g_2)} \bar{w}_1^{-1} g_2^{-1} G_1 g_2 \bar{w}_1 * \ldots * \bar{w}_n^{-1} G_n \bar{w}_n \,,$$

wobei die w_i Wörter in π_1 sind und die $\bar{w}_i$ aus den w_i durch Ersetzen von $\tilde{g}_1$ durch $g_2^{-1}\tilde{g}_1 g_2$ für alle $\tilde{g}_1 \in G_1$ entstehen. Man erhält das gleiche Ergebnis, wenn man mit $c_{G_1}(g_2)$ beginnt und in den folgenden Konjugationen jeden Konjugationsfaktor $\tilde{g}_1 \in G_1$ durch $g_2^{-1}\tilde{g}_1 g_2$ und die Gruppe G_1 durch $g_2^{-1} G_1 g_2 = G_1'$ ersetzt. Sei $G_k' = G_k$ für $k > 1$, dann hat man:

$$G_1 * \ldots * G_n \xrightarrow{c_{m+1} = k_{m+1}} G_1' * \ldots * G_n' \xrightarrow{c_1'} \cdots \xrightarrow{c_m'}$$

$$\bar{w}_1^{-1} g_2^{-1} G_1 g_2 \bar{w}_1 * \ldots * \bar{w}_n^{-1} G_n \bar{w}_n$$

Dabei sei $c_k' = c_{c_{m+1}(G_{j_k})}(c_{m+1}(g_{i_k})) = c_{G_{j_k}'}\,(g_{i_k}')$, was bedeutet, daß die

c'_k, $k = 1,\ldots,m$ FRK's bezgl. $G'_1 * \ldots * G'_n$ sind. Nun kann man die Induktionsvoraussetzung anwenden:

$$G_1 * \ldots * G_n \xrightarrow{k_{m+1}} G'_1 * \ldots * G'_n \xrightarrow{k_m} \cdots \xrightarrow{k_1}$$
$$\bar{\bar{w}}_1^{-1} g_2^{-1} G_1 g_2 \bar{\bar{w}}_1 * \ldots * \bar{\bar{w}}_n^{-1} G_n \bar{\bar{w}}_n$$

und es ist:

$$k_m = c'_m = c_{k_{m+1}(G_{i_m})}(k_{m+1}(g_{j_m}))$$

$$k_\ell = c_{k_{\ell+1} \circ \ldots \circ k_m(G'_{i_\ell})}(k_{\ell+1} \circ \ldots \circ k_m(g'_{j_\ell}))\ .$$

Daraus erhält man unter Berücksichtigung der Tatsache, daß

$G'_{i_\ell} = c_{m+1} G_{i_\ell}$, sowie $g'_{j_\ell} = c_{m+1}(g_{j_\ell})$ ist:

$$k_\ell = c_{k_{\ell+1} \circ \ldots \circ k_{m+1}(G_{i_\ell})}(k_{\ell+1} \circ \ldots \circ k_{m+1}(g_{j_\ell}))$$

und das hat die im Satz geforderte Struktur. □

Da die k_ℓ nur von den vorhergehenden $k_{\ell+1},\ldots,k_m$ abhängen, also von $c_{\ell+1},\ldots,c_m$, gilt folgendes:

2.9 KOROLLAR

Wird $G_1 * \ldots * G_n \xrightarrow{c_1} \ldots \xrightarrow{c_m} H_1 * \ldots * H_n$ umgeschrieben in

$G_1 * \ldots * G_n \xrightarrow{k_m} \ldots \xrightarrow{k_1} H_1 * \ldots * H_n$, so wird $c_m \circ \ldots \circ c_i$ für $1 \leq i \leq m$ umgeschrieben in $k_i \circ \ldots \circ k_m$. □

Dieses technische Korollar wird, wie auch der Satz 2.8, in Kapitel 3 benötigt.

3. Die aufspaltende Sphäre zu einem Element von $Sp(\pi_1)$

Es soll gezeigt werden, wie man - ausgehend von einer festen Zerlegung von $\pi_1(\pi_1 = G_1 * \ldots * G_n)$ und dem zugehörigen Erzeugendensystem von π_2 $(S_1,\ldots,S_n)$ - zu einer beliebigen Zerlegung von π_1 die sie realisierende Sphäre (ausgedrückt als Element von π_2 bzgl. der Erzeugenden $S_1,\ldots,S_n$) erhält. Dies stellt insofern eine Spezifizierung des Satzes von Kneser-Stallings (vgl. [H]) dar als dieser nur die Existenz einer eingebetteten zerlegenden Sphäre, die eine vorgegebene Zerlegung realisiert, sichert, während wir diese Sphäre als Element von π_2 konkret bestimmen.

3.1 SATZ

Sei $c: H_1 * \ldots * H_n \to H_1' * \ldots * H_n'$ eine FRK bzgl. $H_1 * \ldots * H_n$, dann erhält man das zu $H_1' * \ldots * H_n'$ gehörende Erzeugendensystem. $R_1',\ldots,R_n'$ aus dem zu $H_1 * \ldots * H_n$ gehörenden $(R_1,\ldots,R_n)$ durch folgende Umformungen:

Sei $c = c_{H_i}(h_j)$:

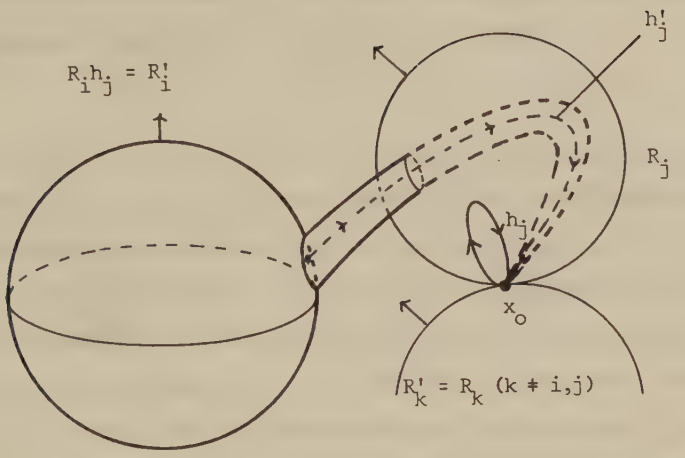
$$R_k' = R_k, \text{ falls } k \neq i, j.$$
$$R_i' = R_i h_j$$
$$R_j' = R_j + R_i (1 - h_j)$$

wobei die Multiplikation von Elementen aus π_2 und Elementen aus $\mathbb{Z}\pi_1$ entsprechend der durch die kanonische Operation von π_1 auf π_2 gegebenen $\mathbb{Z}\pi_1$-Modul-Struktur auszuführen ist.

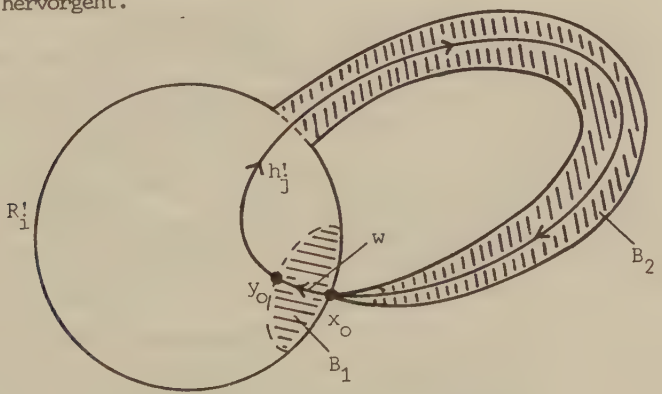
BEWEIS

Wir zeigen zunächst, daß $R_i h_j$ die Gruppe $h_j^{-1} H_i h_j$ abspaltet: Das Element $R_i h_j$ kann nach Satz 9.5 durch eine Einbettung realisiert werden, die

R_k für $k \neq i, j$ nicht trifft.



Das Innere von R'_i kann man sich wie folgt entstanden denken:
$I(R'_i) = (I(R_i) \setminus B_1) \cup B_2$, wobei die B_ℓ Bälle sind, deren Lage aus der Skizze hervorgeht.



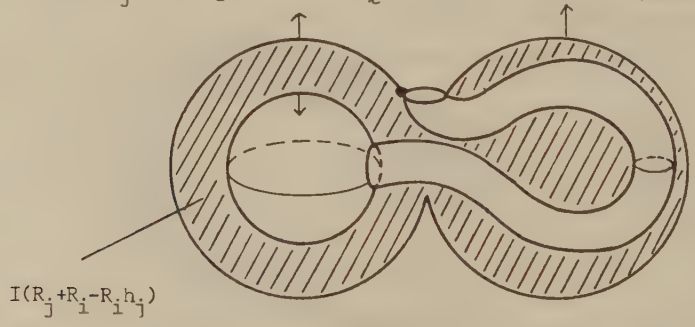
Die Verlegung des Basispunktes nach y_o induziert durch
$[h_i] \to [w^{-1} h_i w]$ einen Isomorphismus von $\pi_1(I(R_i), x_o) = H_i$ nach
$\pi_1(I(R_i), y_o) = \pi_1(I(R'_i), y_o)$, da sich $I(R_i)$ und $I(R'_i)$ nur um Bälle unterscheiden. Eine weitere Verlegung des Basispunktes nach x_o entlang h'_j in-

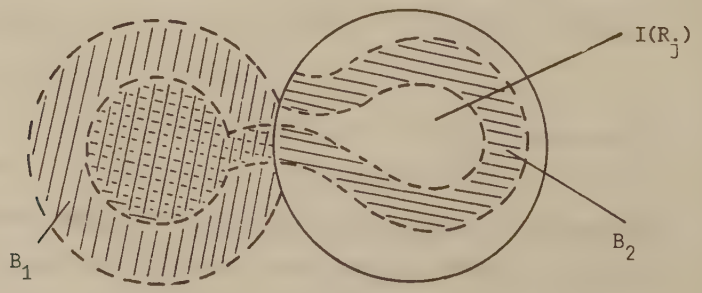
duziert einen Isomorphismus von $\pi_1(I(R_i'),y_o)$ nach $\pi_1(I(R_i'),x_o)$:

$[w^{-1}h_iw] \mapsto [h_j'^{-1}w^{-1}h_iwh_j'] = [h_j]^{-1}[h_i][h_j]$, welches zeigt, daß R_i' die Gruppe $h_j^{-1}H_ih_j$ abspaltet.

Wir untersuchen nun die Sphäre $R_j' = R_j + R_i - R_ih_j$. Da die Sphäre $R_j + R_i$ nach 9.3 einen eingebetteten Repräsentanten hat (die positiven Normalen sind richtig orientiert!), der den oben konstruierten Repräsentanten von R_ih_j nicht trifft, können wir annehmen, daß der eingebettete Repräsentant von $(R_j + R_i) - R_ih_j$ (Einbettung ist nach 9.3 möglich, da die positiven Normalen günstig orientiert sind) die Sphäre R_ih_j und die übrigen R_k $(k \neq i, j)$ nicht trifft. Es bleibt zu überprüfen, daß $(R_j + R_i) - R_ih_j$ die Gruppe $H_j' = H_j$ abspaltet.

Man kann sich das Innere von $R_j + R_i - R_ih_j$ wie folgt entstanden vorstellen: $(I(R_j) \cup B_1) - B_2$, wobei die B_ℓ wie unten skizziert liegen.





Da die Hinzufügung oder das Weglassen eines Balles die Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit nicht verändert, folgt die Behauptung.

□

Da man nach Satz 2.8 jeder Folge von FRK's eine Folge von Konjugationen mit der gleichen Wirkung so zuordnen kann, daß jede dieser Konjugationen eine FRK bzgl. ihres Urbildes ist, erhält man durch sukzessives Anwenden von Satz 3.1 zu jeder Folge von FRK's und somit auch zu jeder Zerlegung von π_1 ein kanonisches Erzeugendensystem von π_2 ausgedrückt bzgl. der ursprünglichen Erzeugenden. Jede in M eingebettete den Basispunkt enthaltende Sphäre S gehört aber zu einem kanonischen Erzeugendensystem, entweder als einzelnes Erzeugendes oder als Summe solcher Erzeugender, da sie M zerlegt (keine Faktoren $\mathbb{Z}$ in π_1) und daher eine Aufspaltung von π_1 realisiert, die sich wie in Satz 2.1 aus unzerlegbaren Faktoren zusammensetzt.

Um diese Sphären besser berechnen zu können, wird für den Erzeugendenwechsel in π_2 eine Matrizenschreibweise gewählt.

3.2 SATZ

Sei $c_{H_i}(h_j)\colon H_1 * \ldots * H_n \to H_1' * \ldots * H_n'$ eine FRK bzgl. $H_1 * \ldots * H_n$, dann wird die Abbildung von π_2, die $R_1,\ldots,R_n$ auf $R_1',\ldots,R_n'$ abbildet, durch folgende Matrix beschrieben:

$$j \to \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1-h_j & \cdots & h_j & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{, falls } j < i \text{, bzw.} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \cdots & h_j & \cdots & 1-h_j & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix} \text{, falls } i < j.$$

$$\begin{matrix} & & \uparrow & & \uparrow \\ & & j & & i \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} & & \uparrow & & \uparrow \\ & & i & & j \end{matrix}$$

d.h.: Die Koeffizienten von R_k' bezüglich des alten Erzeugendensystems stehen in der k-ten Spalte der oben angegebenen Matrix.

BEWEIS Satz 3.1 □

Die zu einer FRK c gehörende Matrix werde im folgenden mit M(c) bezeichnet. Die Hintereinanderschaltung von mehreren FRK's läßt sich dann durch eine modifizierte Matrizenmultiplikation auf die Sphärensysteme übertragen.

3.3 SATZ

Sei $c_m \circ \ldots \circ c_1$ eine Folge von FRK's bzgl. $G_1 * \ldots * G_n$, dann werden die Koeffizienten des Sphärensystems, das die Zerlegung $c_m \circ \ldots \circ c_1(G_1 * \ldots * G_n)$ realisiert bzgl. der Standarderzeugenden $S_1,\ldots,S_n$ gegeben durch die Spalten der Matrix M:

$$M = M(c_m) \cdot c_m M(c_{m-1}) \cdot \ldots \cdot (c_m \circ \ldots \circ c_2) M(c_1)$$

Hierbei bedeutet $c_i M(c)$, daß sämtliche Einträge von M(c) (das sind Elemente aus $\mathbb{Z}\pi_1$) der kanonischen Fortsetzung von c_i auf $\mathbb{Z}\pi_1$ ausgesetzt werden.

BEWEIS

Vollständige Induktion nach der Anzahl m der FRK's in der Folge:

m = 1:

Das ist die Aussage von Satz 3.2.

m > 1:

Die zu $c_m \circ \ldots \circ c_1$ gehörende Matrix sei mit $\bar{M}$ bezeichnet und c_{m+1} sei die nächste auszuführende FRK. Unter $k_{m+1} = c_{m+1}$ (vgl. Satz 2.8) geht das Standarderzeugendensystem $S_1,\ldots,S_n$ über in $S_1',\ldots,S_n'$ mit $S_i' = S_i g_j$ und $S_j' = S_j + S_i(1-g_j)$ und $S_k' = S_k$ für $k \neq i,j$, falls c_{m+1} von der Form $c_{G_i}(g_j)$ ist. Aus der zu $c_m \circ \ldots \circ c_1$ gehörenden Umschreibung in $k_1 \circ \ldots \circ k_m$ erhält man $k_\ell = c_{(k_{\ell+1} \circ \ldots \circ k_{m+1})(G_{j_\ell})}(k_{\ell+1} \circ \ldots \circ k_{m+1}(g_{i_\ell}))$, was sich nach Korollar 2.9 auch wie folgt schreiben läßt:

$$k_\ell = c_{(c_{m+1} \circ \ldots \circ c_{\ell+1})(G_{j_\ell})}(c_{m+1} \circ \ldots \circ c_{\ell+1})(g_{i_\ell})$$

Die Automorphismenfolge $k_1 \circ \ldots \circ k_m$ geht von $c_{m+1}(G_1 * \ldots * G_n)$ aus und die zugehörige Matrix $c_{m+1}\bar{M}$ (denn es sind sämtliche Konjugationsfaktoren und zu konjugierende Gruppen mit c_{m+1} abgebildet, vgl. Satz 2.8) ergibt die Koeffizienten des Erzeugendensystems zu $c_{m+1} \circ \ldots \circ c_1(G_1 * \ldots * G_n)$ bzgl. $S_1',\ldots,S_n'$. Diese Koeffizienten müssen noch bzgl. $S_1,\ldots,S_n$ umgeschrieben werden:

$$\sum_{k=1}^{n} S_k' a_{k\ell} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{n} S_k a_{k\ell} + (S_j + S_i(1-g_j))a_{j\ell} + S_i g_i a_{i\ell}$$

wobei die $\mathbb{Z}\pi_1$-Einträge der Matrix $c_{m+1}\bar{M}$ mit $a_{k\ell}$ bezeichnet werden. Dies bedeutet nach den Regeln der üblichen Matrizenmultiplikation:

$$M = M(c_{m+1})\, c_{m+1}\bar{M}$$

woraus die zu beweisende Beziehung folgt. □

Die Ergebnisse dieses Abschnitts zusammenfassend erhält man:

3.4 THEOREM

Die Koeffizienten sämtlicher eingebetteter Elemente von π_2 bzgl eines Standarderzeugendensystems erhält man als Spalten oder Summen von Spalten, bzw. deren Inversen aus den nach 3.3 gebildeten Matrizen.

BEWEIS

Jede in eine der hier betrachteten Mannigfaltigkeiten eingebettete Sphäre muß die Mannigfaltigkeit zerlegen (alle freien Faktoren von π_1 sind nicht unendlich zyklisch) und somit eine Zerlegung von π_1 in ein freies Produkt induzieren. Diese Zerlegung ist durch die Homotopieklasse der betrachteten Sphäre eindeutig bestimmt (vgl. Satz 1.4 und 1.5) und definiert für jeden Faktor ein Produkt aus unzerlegbaren Gruppen (vgl. Satz 2.1). Zu der gesamten Zerlegung gehört ein Erzeugendensystem von π_2, welches durch eine der oben beschriebenen Matrizen aus dem Standarderzeugendensystem hervorgegangen ist. Die betrachtete Sphäre ist nun eines dieser Erzeugenden (d.h. liegt in seiner Homotopieklasse) oder die Summe von mehreren (vgl. Bemerkung 1.2.3).

□

Leider ist es auf Grund dieser Aussage nicht möglich, sämtliche eingebetteten Elemente von π_2 explizit zu bestimmen, da die in 3.3 beschriebene Matrizenmultiplikation sehr unübersichtlich wird (es gibt nicht einmal die Möglichkeit, von vorgegebenen Matrizen mit $\mathbb{Z}\pi_1$-Einträgen zu überprüfen, ob sie invertierbar sind oder nicht). Ein leicht nachprüfbares notwendiges Kriterium ergibt sich aus 3.3 aber dennoch, wenn wir

von nun an voraussetzen, daß keiner der Faktoren G_i endlich ist (dann fällt Relation 9.2.3 weg):

3.5 KOROLLAR

Ist $S = S_1 z_1 + \ldots + S_n z_n$ mit $z_i \in \mathbb{Z}\pi_1$ ein einbettbares Element von π_2, so liefert der Augmentierungshomomorphismus $\alpha: \mathbb{Z}\pi_1 \to \mathbb{Z}$ für die $\mathbb{Z}\pi_1$-Koeffizienten $(z_1,\ldots,z_n)$ von S den Wert $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$, wobei $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ und höchstens n-1 der $\varepsilon_i \neq 0$, wenn man geeignete Vielfache von $(1,\ldots,1)$ hinzu addiert.

BEWEIS

Die in Satz 3.3 beschriebenen Matrizen gehen unter α in die Einheitsmatrix über. Diese Eigenschaft bleibt sowohl bei der Abbildung der $\mathbb{Z}\pi_1$-Einträge dieser Matrizen mit einer FRK erhalten, als auch bei der üblichen Matrizenmultiplikation. Daher gehen die in Satz 3.3 beschriebenen Matrizen unter α alle in die Einheitsmatrix über. Zusammen mit Theorem 3.4 erhält man die gewünschte Aussage, wenn man noch die Relation $S_1 + \ldots S_n = 0$ (vgl. Satz 9.2) berücksichtigt.

□

Man kann also nur durch das Augmentieren bereits feststellen, aus welchem Erzeugenden bzw. aus welcher Summe von Erzeugenden ein Element hervorgegangen sein muß, falls es durch eine Einbettung realisierbar ist, also auch welche Aufspaltung in Konjugierte der G_i:

$$(w_{k_1}^{-1} G_{k_1} w_{k_1} * \ldots * w_{k_\ell}^{-1} G_{k_\ell} w_{k_\ell}) * (w_{k_{\ell+1}}^{-1} G_{k_{\ell+1}} w_{k_{\ell+1}} * \ldots * w_{k_n}^{-1} G_{k_n} w_{k_n})$$

es realisiert $(w_{k_j} \in \pi_1)$.

Betrachtet man beispielsweise nur die erste Spalte der oben konstruierten Matrix, so erhält man alle Sphären S_1', die ein Konjugiertes von G_1 abspalten:

$$w_1^{-1}G_1w_1 * (w_2^{-1}G_2w_2 * \ldots * w_n^{-1}G_nw_n).$$

Wendet man den Homomorphismus $\alpha_1: \mathbb{Z}\pi_1 \to \mathbb{Z}\pi_1$, der nur die Erzeugenden von G_1 auf 1 abbildet und die übrigen Erzeugenden von π_1 festläßt, auf die Koeffizienten von S_1' an, so erhält man eine Sphäre, die folgende Aufspaltung realisiert (es sei $\alpha_1(w_j) = \bar{w}_j$):

$$\begin{aligned}&\bar{\bar{w}}_1^{-1}\, G_1\, \bar{w}_1 * (\bar{\bar{w}}_2^{-1}G_2\bar{w}_2 * \ldots * \bar{\bar{w}}_n^{-1}G_n\bar{w}_n)\\ &= \bar{\bar{w}}_1^{-1}\,(G_1 * (\bar{w}_1\bar{\bar{w}}_2^{-1}G_2\bar{w}_2\bar{w}_1^{-1} * \ldots * \bar{w}_1\bar{\bar{w}}_n^{-1}G_n\bar{w}_n\bar{\bar{w}}_1^{-1}))\bar{w}_1\end{aligned}$$

Nach Definition von α_1 stammen die Wörter $\bar{w}_j$ aus $G_2 * \ldots * G_n$, daher läßt sich durch einen Automorphismus des zweiten Faktors diese Zerlegung überführen in: $\bar{\bar{w}}_1^{-1}(G_1 * (G_2 * \ldots * G_n))\bar{w}_1$, ohne daß sich die zerlegende Sphäre ändert (vgl. 2.7). Es gilt also $\alpha_1(S_1') = S_1\bar{w}_1$, und die erste Spalte der zu S_1' gehörenden Matrix muß unter α_1 das Ergebnis

$$\begin{pmatrix} \bar{w}_1 & \ldots\ldots \\ 0 & \ldots\ldots \\ \vdots & \\ 0 & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

liefern. Somit können wir ein stärkeres notwendiges Kriterium als 3.5 formulieren.

3.6 KOROLLAR

Ist $S = S_1 z_1 + \ldots + S_n z_n$ mit $z_i \in \mathbb{Z}\pi_1$ ein einbettbares Element aus π_2, welches nach 3.5 ein Konjugiertes von G_j abspaltet (d.h. $\alpha(z_j) = \pm 1$ und $\alpha(z_i) = 0$, $i \neq j$, wenn man ein geeignetes Vielfaches von $S_1 + \ldots + S_n = 0$ zu S hinzuzählt), so müssen durch den Homomorphismus $\alpha_j: \mathbb{Z}\pi_1 \to \mathbb{Z}\pi_1$, der die Erzeugenden von G_j auf 1 abbildet und die übrigen Erzeugenden von π_1 festläßt, die Koeffizienten z_i zu Null für $i \neq j$ und der Koeffizient z_j zu einem Element aus $G_1 * \ldots * \overset{\vee}{G_j} * \ldots * G_n$ werden, wenn man zu S ein geeignetes Vielfaches von $S_1 + \ldots + S_n$ hinzuzählt.

BEWEIS

Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion nach der Anzahl der FRK's in der Folge:

<u>k = 1:</u>

Die Matrizen aus 3.2 erfüllen die Behauptung (es wird nur die j-te Spalte untersucht!).

<u>k > 1:</u>

Sei M eine durch die Operation in Satz 3.3 zu einer Folge von k-1 FRK's gebildete Matrix, die die Behauptung des Korollars erfüllt:

$$M = \begin{pmatrix} & z_{11} & \\ & \vdots & \\ \ldots & z_{jj} & \ldots \\ & \vdots & \\ & z_{nj} & \end{pmatrix}$$

Ist die k-te auszuführende FRK von der Form $c_{G_i}(g_\ell)$, so erhält man nach 3.3 die zu der gesamten Folge gehörende Matrix $\bar{M}$ durch:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 \;\dots\; 0 & \\ & & \vdots \quad \vdots & \\ & & 1-g_\ell \;\cdot\cdot\; g_\ell & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & \bar{z}_{1j} & \\ & \vdots & \\ \dots & \vdots & \dots \\ & \vdots & \\ & \bar{z}_{nj} & \end{pmatrix}$$

falls $\ell < i$ (den anderen Fall behandelt man ebenso). Hier ist $\bar{z}_{rj} = c_{G_i}(g_\ell)(z_{rj})$. Auch die $\bar{z}_{rj}$ haben die gewünschte Eigenschaft, wenn die z_{rj} sie hatten, wie man leicht nachrechnet.

$$\begin{matrix} \\ \ell \to \\ \\ i \to \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 \;\dots\; 0 & \\ & & \vdots \quad \vdots & \\ & & 1-g_\ell \;\dots\; g_\ell & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & \bar{z}_{1j} & \\ & \vdots & \\ \dots & \vdots & \dots \\ & \vdots & \\ & \bar{z}_{nj} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \bar{z}_{1j} & \\ & \vdots & \\ \dots & (1-g_\ell)\bar{z}_{\ell j} + g_\ell \bar{z}_{ij} & \dots \\ & \vdots & \\ & \bar{z}_{nj} & \end{pmatrix}$$

Die Aussage ist klar für $i, \ell \neq j$. Für $\ell = j$ wird $1-g_\ell = 1-g_j$ unter α_j zu 0 und die Behauptung folgt, während für $i = j$ der Eintrag $g_\ell \bar{z}_{jj}$ unter α_j übergeht in $g_\ell \alpha_j(\bar{z}_{jj})$, was in $G_1 * \dots * \check{G}_j * \dots * G_n$ liegt, da ℓ nicht gleich j sein kann.

Ähnliche Kriterien kann man für Sphären ableiten, die auf jeder Seite ein echtes freies Produkt abspalten, wenn man entsprechend mehrere Gruppen gleich 1 setzt.

4. Ein Baum zu einem Element von π_2:

Da die Struktur einer eingebetteten Sphäre in der Mannigfaltigkeit selbst schwer zu erkennen ist, wird jedem Element aus π_2 ein Baum zugeordnet, an dem man, falls es sich um ein einbettbares Element handelt, unter gewissen Umständen (vgl. 7 und 8) ablesen kann, welche Folge von FRK's die zugehörige Zerlegung von π_1 induzierte.

4.1 DEFINITION

4.1.1 Ein *Baum* Γ ist ein einfach-zusammenhängender Graph (d.h. bestehend aus endlich vielen Punkten und Kanten), dessen Kanten so gerichtet sind, das sie von einem ausgezeichneten Punkt, dem *Basispunkt* (BP) wegzeigen.

4.1.2 Die Kanten tragen *Bezeichnungen* g, wobei g ein Element aus einem der freien Faktoren von π_1 ist.

4.1.3 Die Punkte tragen *Gewichte* $(k_1,\ldots,k_n)$ mit $k_i \in \mathbb{Z}$. Das Gewicht $(0,\ldots,0)$ wird weggelassen.

4.1.4 Unter der Länge eines Baumes Γ, $\ell(\Gamma)$, verstehen wir die Anzahl der Kanten in Γ.

4.1.5 Einem Baum wird auf folgende Weise ein Element aus π_2 zugeordnet: Jedem Gewicht $(k_1,\ldots,k_n)$ $(\neq (0,\ldots,0))$ wird das Element $(S_1k_1 + \ldots + S_nk_n)w$ zugeordnet, wobei w das Element aus π_1 ist, welches man durch Ablesung des Kantenweges vom Gewicht zum Basispunkt erhält (der Zufahrtsweg vom Basispunkt zum Gewicht wird also in entgegengesetzter Kanten-Richtung abgelesen!).
Die Summe all dieser Elemente für alle im Baum auftretenden Gewichte ist das Element aus π_2, welches dem Baum zugeordnet wird.

4.2 DEFINITION

Ein Baum heißt *reduziert*, wenn:

4.2.1 Es gibt keine Kanten, die das triviale Element als Bezeichnung tragen.

4.2.2 Zwei aufeinanderfolgende Kanten tragen Bezeichnungen, die aus verschiedenen freien Faktoren stammen.

4.2.3 Beginnen an einem Verzweigungspunkt Kanten mit Bezeichnungen aus demselben freien Faktor, so stellen sie verschiedene Elemente aus diesem Faktor dar.

4.2.4 In einem Gewicht haben alle Einträge gleiches Vorzeichen und mindestens einer der Einträge ist Null.

4.2.5 Extremitäten (das sind Enden von Kantenwegen) tragen stets ein Gewicht ungleich $(0,\ldots,0)$.

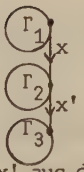
4.3 LEMMA

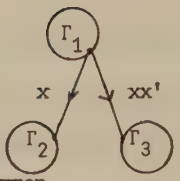
Man kann einen Baum reduzieren, ohne das dargestellte Element aus π_2 zu verändern.

BEWEIS

4.3.1 Zunächst werden Kanten mit 1 als Bezeichnung, Gewichte der Form $(m,..,m)$ mit $m \in \mathbb{Z}$, sowie Extremitäten ohne Gewicht weggelassen.

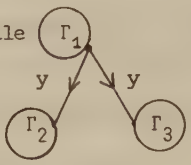
Danach führe man vom Basispunkt aus die Kanten entlanggehend die folgenden Prozesse aus:

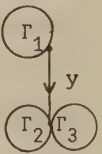
4.3.2 Eine Stelle 

wird ersetzt durch 

,

wenn x und x' aus demselben freien Faktor stammen.

4.3.3 Eine Stelle 

wird ersetzt durch 

.

Hierbei sind die Γ_i beliebige Teilbäume und Gewichte, die an einem Punkt zusammentreffen, werden Komponentenweise addiert. Da ein Baum nur endlich viele Kanten hat, kann man nur endlich viele Prozesse 4.3.2 und 4.3.3 durchführen.

Nun wird wieder 4.3.1 angewendet. Verringert sich hierbei die Länge des Baumes, so werden eventuell wieder die Prozesse 4.3.2 und 4.3.3 notwendig. Insgesamt erreicht man nach endlich vielen Schritten einen Baum, der die Bedingungen 4.2.1-3 und 4.2.5 erfüllt. Nun kann man durch geeignete Addition von $(m,\ldots,m)$, mit $m \in \mathbb{Z}$, zu einem Gewicht erreichen, daß es der Bedingung 4.2.5 genügt, ohne das bisher Erreichte wieder zu zerstören.

Bei allen oben beschriebenen Veränderungen bleiben die Ablesungen der Kantenwege (als Elemente von π_1) und, wegen der Relation $S_1 + \ldots + S_n = 0$, die den Gewichten zugeordneten Elemente von π_2 erhalten, also auch das durch den Baum dargestellte Element von π_2.

□

Nun möchte man umgekehrt zu einem Element aus π_2 einen Baum bestimmen, der dieses Element gemäß 4.1.5 darstellt; dazu zunächst:

4.4 DEFINITION

4.4.1 Sei $w \in \pi_1$, unter einer *Silbenzerlegung* von w verstehen wir eine Darstellung $w = g_1 \cdots g_k$, wobei g_i aus dem freien Faktor $G_{k(i)}$ stammt und g_{i-1} und g_{i+1} nicht in $G_{k(i)}$ liegen.

4.4.2 Ein Element $S_1(m_{11}w_{11} + \ldots + m_{1\ell_1}w_{1\ell_1}) + \ldots + S_n(m_{n1}w_{n1} + \ldots + m_{n\ell_n}w_{n\ell_n})$ aus π_2 ist in *Normalform*, wenn die w_{ij} in Silbenzerlegung gegeben sind und $w_{ij} \neq w_{ij'}$, für $j \neq j'$, und wenn ein Wort w_{ij} nicht in den Koeffizienten zu allen Sphären vorkommt. Kommt ein Wort w_{ij} in den Koeffizienten zu mehreren Sphären vor, so haben die zugehörigen m_{ij} alle gleiches Vorzeichen.

4.5 BEMERKUNG

Ein vorgegebenes Element von π_2 kann durch geeignete Addition von $(S_1 + \ldots + S_n)z = 0$ mit $z \in \mathbb{Z}\pi_1$ in Normalform gebracht werden, und zwei Normalformen zu einem Element unterscheiden sich nur noch um Summanden der Form $(S_1 + \ldots + S_n)mw$, wobei $m := \pm \max\{|m_{ij}| | w_{ij} = w\}$ und m hat negatives Vorzeichen, wenn die m_{ij} alle positiv und positives Vorzeichen, wenn die m_{ij} alle negativ sind.

4.6 BEMERKUNG

Um in einem konkreten Fall feststellen zu können, ob eine Silbe gleich 1 oder zwei Silben gleich sind, muß man in dem betreffenden Faktor das Wortproblem lösen können. Eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß die Teilmannigfaltigkeiten M_i, in die M von den S_i zerlegt wird, hinreichend groß sind (siehe [Wa]).

4.7 BEMERKUNG

Zu einem reduzierten Baum gehört eine Sphäre in Normalform.

4.8 LEMMA

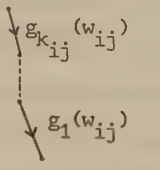
Zu jedem Element von π_2 gibt es einen reduzierten Baum, der eindeutig bestimmt ist, bis auf folgenden Prozeß:

4.8.1 Ein Gewicht $(k_1,\ldots,k_n)$ wird abgeändert zu $(k_1+m,\ldots,k_n+m)$, wobei $m:=\pm\{\max|k_i|,\ i=1,\ldots,n\}$ und m hat positives Vorzeichen, wenn alle $k_i \leq 0$ und negatives Vorzeichen, wenn alle $k_i \geq 0$ sind.

BEWEIS

Wir ordnen einem Element $S = S_1(m_{11}w_{11}+\ldots+m_{1\ell_1}w_{1\ell_1})+\ldots$ $\ldots+S_n(m_{n1}w_{n1}+\ldots+m_{n\ell_n}w_{n\ell_n})$ auf folgende Weise einem Baum zu:

4.8.2 Jedem Summanden $m_{ij}w_{ij}$ mit der Silbenzerlegung $g_1(w_{ij})\ldots g_{k_{ij}}(w_{ij})$ von w_{ij} wird der Kantenweg



zugeordnet und der Endpunkt mit dem Gewicht $(0,\ldots,0,\underbrace{m_{ij}}_{\text{i-te Stelle}},0,\ldots,0)$ versehen.

4.8.3 Die Kantenwege zu jedem Summanden aus den Koeffizienten läßt man alle an demselben BP beginnen und reduziert den entstehenden Baum anschließend.

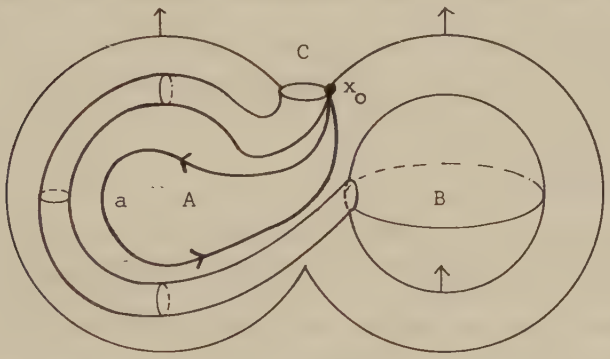
Der so erhaltene reduzierte Baum stellt nach Konstruktion das gewünschte Element von π_2 dar (vgl. 4.1.5 und 4.3). Da ein reduzierter Baum

zu einer Normalform von S gehört und sich zwei Normalformen zu S nach 4.5 nur um Summanden der Form $(S_1 + \ldots + S_n)$ mw mit m wie in 4.5 unterscheiden folgt die Behauptung.

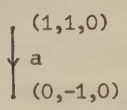
□

4.9 BEISPIEL

4.9.1 Im Fall $\pi_1 = A * B * C$ betrachten wir das (einbettbare) Element $S_1 + S_2(1-a)$ aus π_2. Die zugehörige Sphäre hat folgenden eingebetteten Repräsentanten (vgl. Satz 3.1):

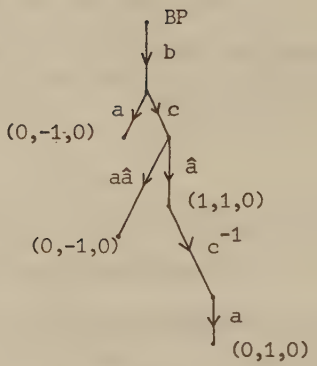


Der Baum zu diesem Element hat die Form:



Man kann sich diesen Baum dadurch entstanden denken, daß der Weg a auf die Kante a und die Sphären $S_1 + S_2$ bzw. $-S_2$ auf die Gewichte (1,1,0) bzw. (0,-1,0) zusammengezogen wird.

4.9.2 Wieder sei $\pi_1 = A * B * C$ und $S = S_1\hat{a}cb + S_2(\hat{a}cb - a\hat{a}cb + ac^{-1}\hat{a}cb - ab)$, mit Elementen $a, \hat{a} \in A$, $b \in B$ und $c \in C$. Dann hat $\Gamma(S)$ die Form:



(Dieser Baum gehört zu einer eingebetteten Sphäre, weil S die Zerlegung von π_1 in $c_C(b) \circ c_A(b) \circ c_B(a) \circ c_A(c) \circ c_C(\hat{a})$ (A) und $c_C(b) \circ c_A(b) \circ c_B(a) \circ c_A(c) \circ c_C(\hat{a})$ (B*C) realisiert.)

4.10 BEMERKUNG

Da mit einer Sphäre S auch jede globalkonjugierte Sw mit $w \in \pi_1$ durch eine Einbettung realisierbar ist (Satz 9.5), wird im folgenden der Weg vom Basispunkt zum ersten Gewicht oder zur ersten Verzweigung weggelassen. Eine solche Veränderung bezeichnen wir als *Globalkonjugation* des Baumes, da sie einer Globalkonjugation der dargestellten Sphäre entspricht.

4.11 DEFINITION

Ein Baum Γ heißt *vollständig reduziert*, wenn er reduziert ist (vgl. 4.2) und wenn am Basispunkt mindestens ein Gewicht steht oder Kanten aus mindestens zwei verschiedenen Faktoren beginnen.

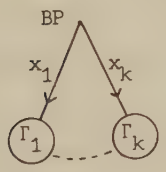
4.12 LEMMA

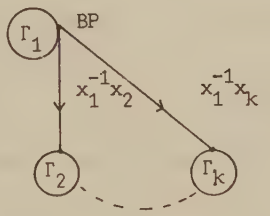
Zu jedem Element S aus π_2 existiert ein globalkonjugiertes Element Sw($w \in \pi_1$) mit einem vollständig reduzierten Baum.

BEWEIS

Nach 4.8 gibt es zu S einen reduzierten Baum. Ist die Bedingung 4.12 nicht erfüllt, so steht am Basispunkt kein Gewicht und es beginnen höchstens mehrere Kanten aus demselben freien Faktor.

Handelt es sich nur um eine Kante, so läßt man sie weg, was einer Globalkonjugation mit dem zugehörigen inversen Element aus π_1 entspricht. An 4.2 ändert sich dabei nichts. Beginnen am Basispunkt mehr als eine Kante aus demselben Faktor, so führt man folgende Umformung[1] durch:





(Hier mögen die x_i alle aus demselben freien Faktor X von π_1 stammen, aber verschieden sein.)

Da Γ_1 mindestens aus einem Gewicht besteht oder mit Kanten, die nicht aus X stammen, beginnt, hat der neue Baum die gewünschte Eigenschaft. Dieser Veränderung entspricht eine Globalkonjugation des dargestellten Elementes aus π_2 mit x_1^{-1}.

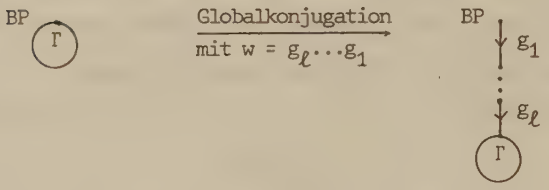
Insgesamt erhält man einen vollständig reduzierten Baum zu S, indem man alle Kanten bis zum ersten Gewicht oder bis zum ersten Verzweigungspunkt wegläßt und dann eventuell noch den zweiten oben beschriebenen

---

(1) Die Auswahl von x_1 für den nachfolgenden Prozeß stellt keine Einschränkung dar, da die Reihenfolge der an einem Punkt beginnenden Kanten beliebig ist.

Prozeß ausführt. □

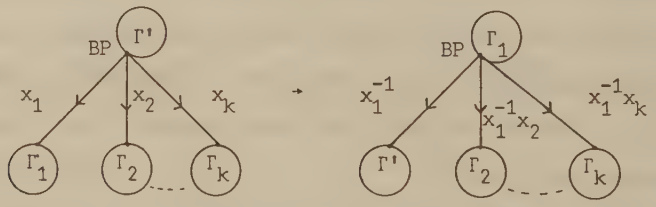
Als nächstes wird untersucht, wie sich ein bereits vollständig reduzierter Baum bei einer Globalkonjugation verändert, d.h. durch das Einfügen eines Stachels zwischen Basispunkt und dem Beginn des Baumes:



4.13 LEMMA

Wird ein vollständig reduzierter Baum globalkonjugiert und anschließend wieder vollständig reduziert, so unterscheidet er sich von dem ursprünglichen nur durch eine Folge von nachstehend angegebenen Prozessen[(1)]:

4.13.1



$\Gamma_1,\ldots,\Gamma_k$, Γ' bestehen mindestens aus einem Gewicht und beginnen mit Kanten, die nicht in dem freien Faktor X, aus dem die x_i stammen, liegen. Die Elemente x_i sind paarweise verschieden.

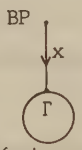
---

(1) Siehe S. 37.

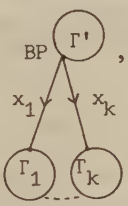
BEWEIS

Wir betrachten eine Globalkonjugation mit einer Silbe (d.h. mit einem Element aus einem freien Faktor), da man daraus die Behauptung für beliebige Elemente aus π_1 ableiten kann.

Sei Γ also vollständig reduziert. Wir führen eine Globalkonjugation mit $x \in X$ durch:

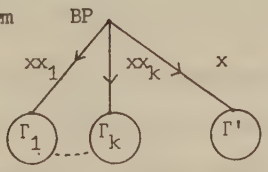


Beginnt Γ nicht mit einer Kante aus X, so ist man fertig, da zur vollständigen Reduktion nur x weggelassen wird.

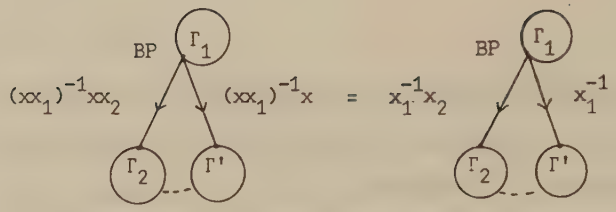
Nun sei Γ von der Form 

, wobei die $x_i \in X$ und die Γ_i und Γ' aus mindestens einem Gewicht bestehen und mit Kanten aus von X verschiedenen Faktoren beginnen.

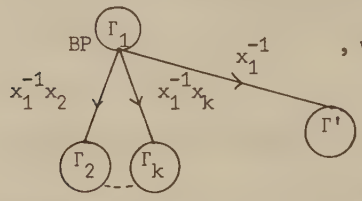
Nach Reduktion ist

von der Form 

wenn man annimmt, daß die $x_i \neq x^{-1}$ für $i = 1,\ldots,k$. Nach einer vollständigen Reduktion erhält man den Baum:



Der Übergang von Γ zu diesem Baum entspricht dem Prozeß 4.13.1. Nun werde noch der Fall betrachtet, daß eines der x_i (o.E. x_1) gleich x^{-1} ist. Dann hat man nach dem Reduzieren den Baum:



, welcher bereits vollständig reduziert ist. Der Übergang von Γ zu diesem Baum entspricht ebenfalls dem Prozeß 4.13.1.

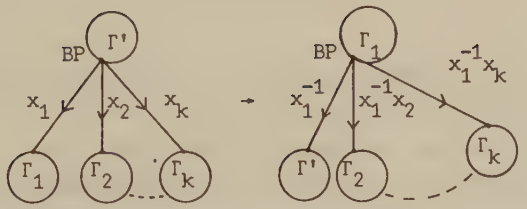
□

4.14 KOROLLAR

Zu jeder Globalkonjugationsklasse von Elementen aus π_2 (bzgl. der π_1-Operation) gibt es einen vollständig reduzierten Baum, der eindeutig bestimmt ist bis auf folgende Prozesse:

4.14.1 Ein Gewicht $(k_1,\ldots,k_n)$ wird abgeändert zu $(k_1+m,\ldots,k_n+m)$ mit $m := \pm \max\{|k_i|,\ i = 1,\ldots,n\}$, wobei m positives Vorzeichen hat, falls alle $k_i \leq 0$ und negatives Vorzeichen, falls alle $k_i \geq 0$.

4.14.2

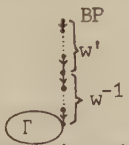


wobei die Γ_i und Γ' mindestens aus einem Gewicht bestehen und mit Kanten, die nicht aus X stammen, beginnen.

Insbesondere gibt es zu einer Globalkonjugationsklasse von Elementen aus π_2 nur endlich viele vollständig reduzierte Bäume und diese haben alle dieselbe Länge.

BEWEIS

Die Existenz eines vollständig reduzierten Baumes zu jeder Klasse ist nach 4.12 gesichert. Sind Γ und Γ' zwei reduzierte Bäume, die dasselbe Element aus π_2 darstellen, so unterscheiden sie sich nach 4.8 nur um eine Folge von Prozessen 4.14.1. Davon sind nach Definition von m nur endlich viele möglich, und sie beeinflussen die Länge des Baumes nicht. Insbesondere gilt, daß zu einem Element, welches durch einen vollständig reduzierten Baum beschrieben werden kann, sämtliche reduzierten Bäume bereits vollständig reduziert sind. Sind Γ und Γ' zwei vollständig reduzierte Bäume zu Elementen Sw bzw. Sw' aus einer Klasse, so stellt



einen Baum zu Sw' dar, welcher nach Reduktion bereits vollständig reduziert sein muß. Der so erhaltene Baum läßt sich nach 4.13 aus Γ durch eine Folge von Prozessen der Art 4.14.2 gewinnen und unterscheidet sich nach dem oben gesagten von Γ'

nur durch eine Folge der Prozesse 4.14.1.

Der Prozeß 4.14.2 verändert die Länge des Baumes nicht (alle x_i sind verschieden) und er liefert nur endlich viele verschiedene vollständig reduzierte Bäume zu einer Klasse, da einer Folge von solchen Prozessen eine Globalkonjugation mit dem Inversen eines in dem ursprünglichen Baum vorhandenen Kantenweges entspricht (vgl. 4.13) und ein Baum nur endlich viele Kanten hat.

□

5. Operationen auf dem Baum

Mit Hilfe der in Kapitel 3 hergeleiteten Matrizenmultiplikation kann man die Veränderung des Baumes zu einer Sphäre bei einer FRK bestimmen.

Wir wollen uns im folgenden nur noch mit Sphären beschäftigen, die Konjugierte eines freien Faktors (o.E. G_1) abspalten, denn die anderen eingebetteten Sphären erhält man durch Addition von Erzeugenden eines geeignet gewählten Erzeugendensystems (vgl. Kapitel 3).

Daher wird nun untersucht, wie sich die erste Spalte der in 3.3 beschriebenen Matrix (das sind die Koeffizienten der Sphäre, die ein Konjugiertes der ersten Gruppe abspaltet), unter FRK's verändert.

5.1 Satz

Bei der Anwendung von $c := c_{G_i}(g_j)$ auf $H_1 * \ldots * H_n$ geht ein Baum zur Sphäre S_1' aus dem kanonischen Erzeugendensystem zu $H_1 * \ldots * H_n$ über in einen Baum zu S_1'' vom kanonischen Erzeugendensystem zu $c(H_1 * \ldots * H_n)$ durch folgende Operationen:

5.1.1 Die Kanten des Baumes werden mit $c_{G_i}(g_j)$ abgebildet, was bedeutet, daß jede Kante

und alle anderen Kanten unverändert bleiben.

5.1.2 Gewichte werden wie folgt abgeändert:

$$\cdot\ (m_1,..,m_j,..,m_i,..,m_n) \ \to\ \begin{array}{l} (m_1,..,m_j,\underbrace{\ldots,m_j}_{i\text{-te Stelle}},..,m_n) \\ \Big\downarrow g_j \\ (0,\ldots,0,\ldots,m_i-m_j,\ldots,0) \end{array}$$

falls $j < i$, sonst

$$\cdot\ (m_1,..,m_i,..,m_j,..,m_n) \ \to\ \begin{array}{l} (m_1,..,\underbrace{m_j,\ \ldots,\ m_j}_{i\text{-te Stelle}},..,m_n) \\ \Big\downarrow g_j \\ (0,\ldots,m_i-m_j,\ldots,0,\ldots,0) \end{array}$$

Ist $m_i = m_j$ findet keine Veränderung statt.

BEWEIS

Zu dem Erzeugendensystem $S_1',\ldots,S_n'$ gehört die Koeffizientenmatrix

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} z_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & ? & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ z_n & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad \text{mit Einträgen } z_\ell \in \mathbb{Z}\pi_1,$$

welche gemäß Satz 3.3 bei der Anwendung von $c_{G_i}(g_j)$ übergeht in

$$M(c_{G_i}(g_j)) \begin{pmatrix} c(z_1) & \cdots & \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & ? & \cdot \\ c(z_n) & \cdots & \end{pmatrix}. \text{ Sei nun o.E. } j < i:$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \ldots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & 1-g_j & \ldots & g_j \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c(z_1) & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & ? & \vdots \\ c(z_n) & \cdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(z_1) & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \\ c(z_j) & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \\ c(z_j)-g_jc(z_j)+g_jc(z_i) & \cdots & \\ \vdots & & \\ c(z_n) & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Daraus kann man direkt die oben beschriebenen Operationen ablesen, nämlich:

(1) Alle Matrizeneinträge werden mit c abgebildet, d.h. alle Silben $g_i \in G_i$ mit g_j konjugiert, was die behauptete Veränderung der Kanten bewirkt.

(2) Darüber hinaus verändert sich nur der Koeffizient zu S_i, also die i-ten Komponenten der Gewichte. Der Summand $c(z_j)$ führt zu einer Einfügung von m_j an der i-ten Stelle des Gewichtes, in dem m_j an der j-ten Stelle stand, und die beiden Summanden $-g_j c(z_j)$ und $g_j c(z_i)$ bestimmen das Gewicht am Ende des ausgefahrenen Stachels $\downarrow g_j$. Ist $m_j = m_i$, so heben sich die zu m_j bzw. m_i gehörenden Teile von $g_j c(z_j)$ und $g_j c(z_i)$ bei der Subtraktion auf und der zu m_j gehörende Teil von $c(z_j)$ ist gleich dem zu m_i gehörenden Teil von $c(z_i)$, es verändert sich das Gewicht mit den Einträgen m_j und m_i also nicht.

5.2 BEMERKUNG

Will man von einem vollständig reduzierten Baum zu einem vollständig reduzierten Baum übergehen, so muß man im Anschluß an die in 5.1 beschriebenen Prozesse noch eine vollständige Reduktion ausführen. Im folgenden sei stets angenommen, daß dies geschehen ist.

In den Kapiteln 7 und 8 wird mit "allgemeinen Konjugationen" $c_X(y)$ argumentiert, wobei X und Y beliebige verschiedene Gruppe G_i sind und y ein Wort aus Y ist. Da man in so einem Fall nicht weiß, welche Komponente der Gewichte zu verändern ist, wird folgende abkürzende Schreib-

weise benutzt.

5.3 SCHREIBWEISE

5.3.1 Das Gewicht $(0,\ldots,m_i,\ldots,0)$ wird abkürzend mit m_iG_i (oder auch mX, falls i nicht bekannt ist) bezeichnet.

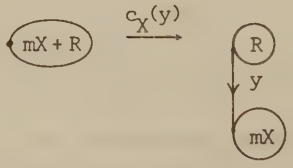
5.3.2 Das Gewicht $(0,\ldots,m_i,\ldots,m_j,\ldots,0)$ wird mit $m_iG_i + m_jG_j$ bezeichnet.

5.3.3 Ist $m_i = m_j$, so ist "Ausklammern" möglich: $mG_i + mG_j = m(G_i + G_j)$.

5.3.4 Das "+" zwischen zwei Gruppen kann auch weggelassen werden, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht: $X + Y = XY$, dann soll gelten: $mXY = mX + mY$.

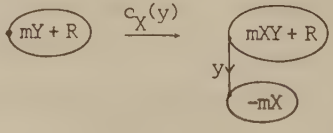
Damit kann man die Operation 5.1.2 wie folgt in zwei Operationen aufspalten, was sich für die kommenden Abschnitte als nützlich erweist:

5.3.5 Operation:



Hier ist X Stellvertreter für eine der Gruppen G_i und R stellt eine Summe Σm_jX_j von Vielfachen der übrigen Faktoren dar, wobei keiner der Faktoren X_j gleich Y sein soll.

5.3.6 Operation:

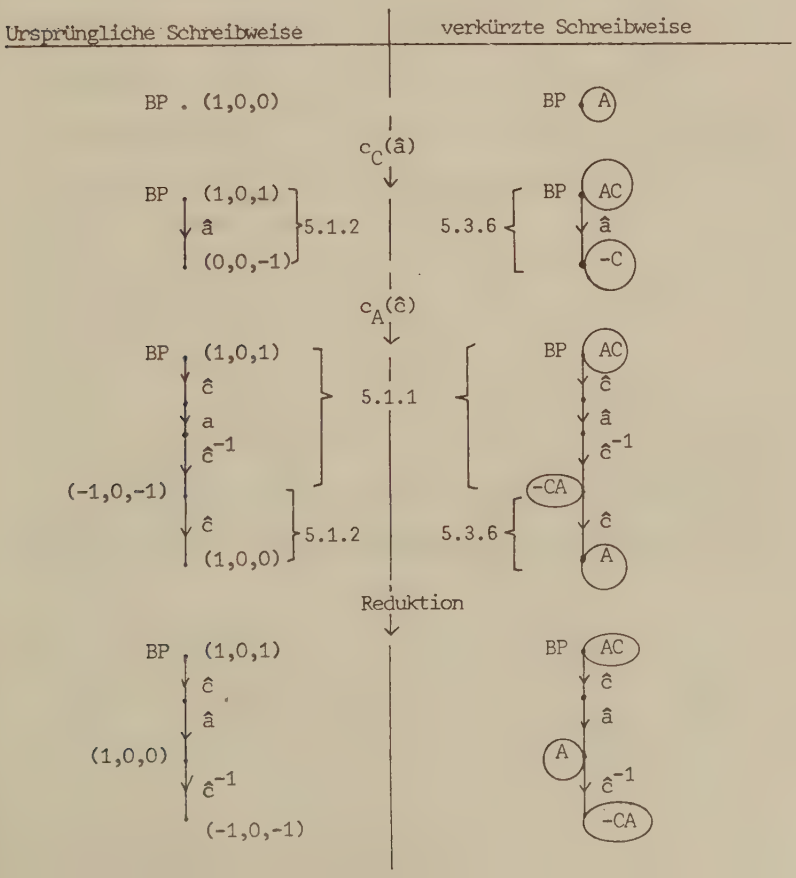


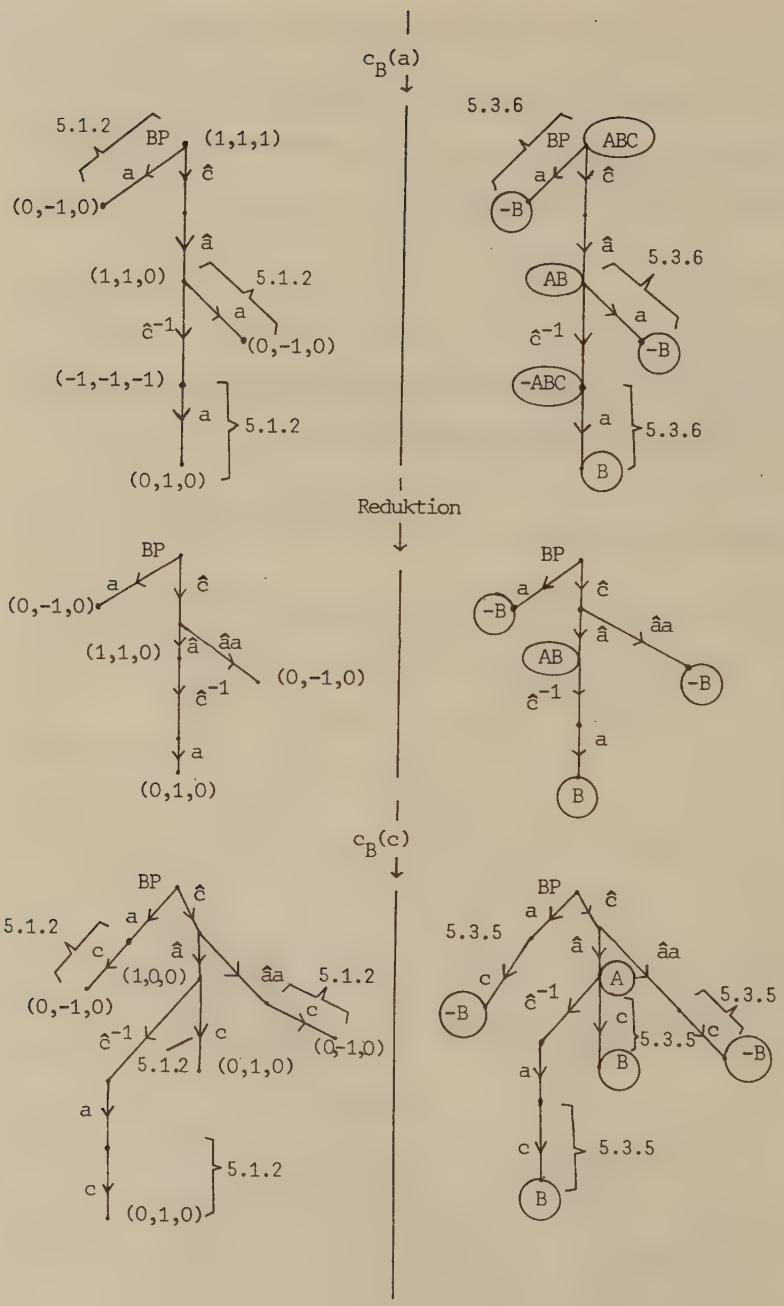
wobei wir nun annehmen, daß in R kein Summand k·X vorkommt.

Die in 5.1 eingeführten Operationen sollen durch ein Beispiel illustriert werden, wobei neben der ursprünglichen Notation auch die abkürzende Schreibweise verwendet wird:

5.4 BEISPIEL

Sei $\pi_1(M,x_o) = A * B * C$. Wir betrachten die Folge $c_B(c) \circ c_B(a) \circ c_A(\hat{c}) \circ c_C(\hat{a})$ und wollen die Sphäre bestimmen, die das Bild von A unter diesen Konjugationen abspaltet:




$c_B(a)$
5.1.2
BP
(1,1,1)
a
ĉ
(0,-1,0)
â
(1,1,0)
5.1.2
a
ĉ⁻¹
(0,-1,0)
(-1,-1,-1)
a
5.1.2
(0,1,0)
5.3.6
BP
ABC
a
ĉ
-B
â
5.3.6
AB
a
ĉ⁻¹
-B
-ABC
a
5.3.6
B
Reduktion
BP
a
ĉ
(0,-1,0)
(1,1,0)
â
âa
(0,-1,0)
ĉ⁻¹
a
(0,1,0)
BP
a
ĉ
-B
â
âa
AB
-B
ĉ⁻¹
a
B
$c_B(c)$
BP
ĉ
5.1.2
a
c
â
(1,0,0)
âa
5.1.2
(0,-1,0)
c
ĉ⁻¹
c
(0,-1,0)
5.1.2
(0,1,0)
a
5.1.2
c
(0,1,0)
BP
ĉ
5.3.5
a
â
âa
c
A
-B
ĉ⁻¹
5.3.5
c
5.3.5
B
c
-B
a
c
5.3.5
B

6. Einige Relationen zwischen den FRK's

Es wird bewiesen, daß zwischen den FRK's mehr Relationen als die in Kapitel 2 niedergeschriebenen gelten, wenn man Globalkonjugationen von π_1 und Automorphismen in den einzelnen freien Faktoren vernachlässigt.

6.1 Definition

Unter einer *Globalkonjugation* $k(w)$ der Zerlegung $\pi_1 = G_1 * \ldots * G_n$ versteht man eine Konjugation sämtlicher Elemente g aus π_1 mit einem Wort w aus π_1, d.h. $k(w)(g) = w^{-1}gw$.

6.2 Bemerkung

6.2.1 Wenn $\pi_1 = G_1' * \ldots * G_n'$ unter $k(w)$ übergeht in $G_1'' * \ldots * G_n''$, so geht das kanonische Erzeugendensystem $S_1', \ldots, S_n'$ in das kanonische Erzeugendensystem $S_1'', \ldots, S_n''$ zu $G_1'' * \ldots * G_n''$ über durch Globalkonjugation jeder Sphäre mit w (hier wird unter Globalkonjugation wieder die π_1-Aktion auf π_2 verstanden).

6.2.2 Es ist $k(w) \circ k(v) = k(vw)$.

6.2.3 Seien $G_1' * \ldots * G_n'$ und $G_1'' * \ldots * G_n''$ wie in 6.2.1 globalkonjugierte Zerlegungen von π_1, dann gehen sie unter $c_{G_i}(g_j)$ über in globalkonjugierte Zerlegungen. Insbesondere heißt das, daß unter $c_{G_i}(g_j)$ globalkonjugierte Sphärensysteme wieder in solche übergehen.

6.2.4 Für Globalkonjugationen gilt folgende Relation:

$$c_{G_i}(g_j) \circ k(w) = k(c_{G_i}(g_j)(w)) \circ c_{G_i}(g_j)$$

BEWEIS

6.2.1 Wegen Korollar 9.6 ist das System $S_1'',\ldots,S_n''$ wieder ein eingebettetes paarweise disjunktes Sphärensystem. Daß die Gruppen $w^{-1}G_i'w$ von den S_i' abgespalten werden, zeigt man wie im Beweis zu 3.1.

6.2.2 rechnet man nach.

6.2.3 Es sei $G_\ell' = w_\ell^{-1}G_\ell w_\ell$ mit $w_\ell \in \pi_1$, dann ist $G_\ell'' = w^{-1}w_\ell^{-1}G_\ell w_\ell w$, welches unter $c_{G_i}(g_j) =: c$ übergeht in $c(w_\ell^{-1})G_\ell c(w_\ell)$ bzw. $c(w^{-1})c(w_\ell^{-1})G_\ell c(w_\ell)c(w)$, falls $\ell \neq i$, und in $c(w_i^{-1})g_j^{-1}G_i g_j c(w_i)$ bzw. $c(w^{-1})c(w_i^{-1})g_j^{-1}G_i g_j c(w_i)c(w)$, falls $\ell = i$. Die neuentstandenen Zerlegungen sind wieder globalkonjugiert und zwar mit dem Faktor $c(w)$.

6.2.4 Wegen 6.2.2 kann man sich w in Silben zerlegt vorstellen und wir überprüfen die Behauptung für den Fall $w = g_i \in G_i$:

$$c_{G_i}(g_j) \circ k(g_i)(v) = c_{G_i}(g_j)(g_i^{-1}vg_i) = g_j^{-1}g_i^{-1}g_j(c_{G_i}(g_j)(v))g_j^{-1}g_ig_j$$

$$= k(g_j^{-1}g_ig_j) \circ c_{G_i}(g_j)(v) = k(c_{G_i}(g_j)(g_i)) \circ c_{G_i}(g_j)(v)$$

für ein beliebiges v aus π_1. Analog zeigt man, daß man $c_{G_\ell}(g_j)$ mit $k(g_i)$ vertauschen kann ohne daß sich der Globalkonjugationsfaktor ändert, wenn $\ell \neq i$ ist.

□

6.3 BEZEICHNUNG

6.3.1 Mit $c_{-G_i}(g_j)$ wird das Produkt $c_{G_1}(g_j) \circ \ldots \circ \overset{\vee}{c_{G_i}}(g_j) \circ \ldots \circ \overset{\vee}{c_{G_j}}(g_j) \circ \ldots \circ c_{G_n}(g_j)$ bezeichnet, d.h. das Produkt aller FRK's $c_{G_\ell}(g_j)$ mit $\ell \neq i,j$.

6.3.2 Zwei Folgen von FRK's $c_1 \circ \ldots \circ c_m$ und $\tilde{c}_1 \circ \ldots \circ \tilde{c}_k$ werden als *äquivalent bis auf Automorphismen in den Faktoren* bezeichnet, wenn es Automorphismen ϕ und $\tilde{\phi}$ aus $\bigcup_{i=1}^{n} \Phi_i$ (vgl. 2.2) gibt mit:

$$c_1 \circ \ldots \circ c_m \circ \phi = \tilde{c}_1 \circ \ldots \circ \tilde{c}_k \circ \tilde{\phi}.$$

6.4 BEMERKUNG

Da nach 2.7 die Automorphismen ϕ und $\tilde{\phi}$ keine Wirkung auf die zerlegenden Sphären haben, induzieren die Folgen $c_1 \circ \ldots \circ c_m$ und $\tilde{c}_1 \circ \ldots \circ \tilde{c}_k$ dieselbe Veränderung des Sphärensystems.

6.5 LEMMA

Ist $c_m \circ \ldots \circ c_k \circ \ldots \circ c_1$ eine Folge von FRK's, so erhält man eine dazu bis auf Automorphismen in den Faktoren äquivalente Folge von FRK's, wenn man $c_k := c_{G_i}(g_j)$ ersetzt durch $\bar{c}_k := c_{-G_i}(g_j^{-1})$ und folgende Veränderungen durchführt:

6.5.1 Vor c_m wird die Globalkonjugation $k(c_m \circ \ldots \circ c_{k+1}(g_j))$ eingefügt.

6.5.2 In den $c_{k-1}, \ldots, c_1$ werden alle Konjugationsfaktoren $\tilde{g}_j \in G_j$ ersetzt durch $g_j \tilde{g}_j g_j^{-1}$.

BEWEIS

Wir zeigen, daß $k(g_j) \circ c_{-G_j}(g_j^{-1}) \circ \phi_j = c_{G_i}(g_j)$ ist, wenn ϕ_j der Automorphismus von G_j ist, der jedes Element mit g_j^{-1} konjugiert. Die Behauptung erhält man dann, indem man $k(g_j)$ nach links aus der Folge der FRK's und ϕ_j nach rechts herausschiebt unter Verwendung der Relationen 6.2.4 und 2.6.4:

$$k(g_j) \circ c_{-G_i}(g_j^{-1}) \circ \phi_j(\tilde{g}_\ell) = k(g_j) \circ c_{-G_i}(g_j^{-1}) \begin{cases} \tilde{g}_\ell & \text{falls } \ell \neq j \\ g_j \tilde{g}_j g_j^{-1} & \text{falls } \ell = j \end{cases} =$$

$$k(g_j) \begin{cases} g_j \tilde{g}_\ell g_j^{-1}, & \ell \neq i,j \\ \tilde{g}_i, & \ell = i \\ g_j \tilde{g}_j g_j^{-1}, & \ell = j \end{cases} = \begin{cases} \tilde{g}_\ell, & \ell \neq i,j \\ g_j^{-1} \tilde{g}_i g_j, & \ell = i \\ \tilde{g}_j, & \ell = j \end{cases} = c_{G_i}(g_j)(g_\ell).$$

□

6.6 BEMERKUNG

Aus Lemma 6.5 erhält man die Tatsache, daß es im Fall n = 2 (d.h. $\pi_1 = G_1 * G_2$; G_i unzerlegbar, unendlich und $\neq \mathbb{Z}$) nur Globalkonjugationen gibt.

Bezeichnet man mit $S := -S_1 = S_2$ die Sphäre, die die beiden Faktoren G_1 und G_2 trennt, so erhält man:

6.7 THEOREM

Besteht π_1 aus zwei unzerlegbaren unendlichen Faktoren $\neq \mathbb{Z}$, so sind die einbettbaren Elemente aus π_2 von der Form $\pm Sw$ mit $w \in \pi_1$.

Vergleiche hierzu auch ([W], Kapitel 5), wo das obige Ergebnis mit rein geometrischen Methoden, ohne die Benutzung des Satzes von Fouxe-Rabinowitsch, gezeigt wird.

7. Der Fall $n = 3$

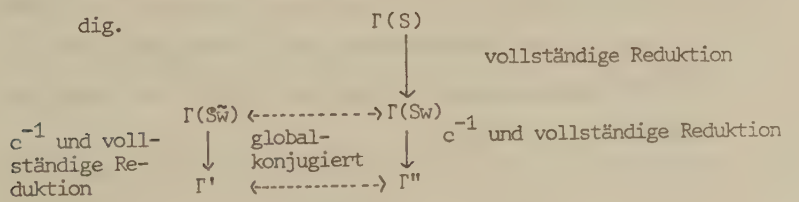
Es wird ein Algorithmus zur Entscheidung, welches Element von π_2 durch eine Einbettung repräsentierbar ist, für den Fall, daß π_1 aus 3 unendlichen, unzerlegbaren Faktoren ungleich $\mathbb{Z}$ besteht ($\pi_1 = A * B * C$), gegeben.

Es werden im folgenden die Symbole X, Y und Z für die Gruppen A, B oder C verwendet, wobei verschiedene Symbole stets verschiedene Gruppen bezeichnen, x, y bzw. z repräsentieren Worte aus X, Y bzw. Z, verschiedene Worte aus einem Faktor sind x', $\tilde{x}$, $\hat{x}$ etc.

7.1 Dem Beweis des Algorithmus liegt folgende Idee zugrunde: Da alle vollständig reduzierten Bäume zu einer Globalkonjugationsklasse von Elementen aus π_2 die gleiche Länge haben (vgl. 4.14), zeigen wir, daß es zu jeder Klasse von einbettbaren Elementen aus π_2 eine Folge von FRK's gibt, die einen zu dieser Klasse gehörenden vollständig reduzierten Baum durch ständigen Aufbau (d.h. Vergrößerung der Länge bei jedem Schritt) erzeugt (Satz 7.5).

Hat man nun ein Element S aus π_2, von dem entschieden werden soll, ob es durch eine Einbettung realisierbar ist, geht man wie folgt vor:

7.1.1 Man konstruiert einen Baum $\Gamma(S)$ zu S und reduziert ihn vollständig.



Hier sei $\Gamma(S\tilde{w})$ ein vollständig reduzierter Baum, der durch ständigen Aufbau entstanden ist. (Ist S einbettbar, so muß es einen solchen geben, wie in 7.5 bewiesen wird). Wegen 4.14 weiß man, daß $\ell(\Gamma(S\tilde{w})) = \ell(\Gamma(Sw))$, ferner existiert wenigstens eine FRK, die die Länge von $\Gamma(S\tilde{w})$ verringert (nämlich die Inverse c^{-1} der letzten beim Aufbau benutzten FRK). Wendet man diese FRK auf $S\tilde{w}$ und Sw an, so entstehen wieder globalkonjugierte Sphären (vgl. 6.2.3). Dann müssen nach 4.14 die beiden Bäume die durch diese FRK und vollständige Reduktion entstehen, wieder die gleiche Länge haben. Auf der linken Seite des obigen Diagramms weiß man, daß sich die Länge verringert, also muß dies auch auf der rechten Seite geschehen. Es bleibt eine FRK mit den gewünschten Eigenschaften zu bestimmen. Dazu überlegt man folgendes:

7.1.2 Alle FRK's $c_X(y)$ mit einem Wort y, welches sich nicht aus Buchstaben, die in dem Baum bereits vorkommen, oder deren Inversen zusammensetzen läßt, führen zu einer Nicht-Verkürzung der Länge des vollständig reduzierten Baumes (Korollar 7.7).

7.1.3 Für alle in dem Baum vorkommenden Buchstaben und Buchstabenkombinationen y gibt es nur endlich viele FRK's der Form $c_X(y)$ und $c_X(y^{-1})$, wobei X die Gruppen $G_i \neq Y$ durchläuft.

7.1.4 Versucht man alle diese FRK's und keine führt zu einer Verkürzung der vollständig reduzierten Länge (das ist die Länge eines vollständig reduzierten Baumes zu einem vorgegebenen Baum) des betrachteten Baumes, so weiß man, daß S nicht durch eine Einbettung realisierbar ist.

7.1.5 Sind eine oder mehrere Verkürzungen möglich, so fährt man bei 7.1.3 fort.

Diese Vorgehensweise liefert einen "schwerfälligen" Algorithmus, da man jedes $c_X(y)$ mit allen y's, die man aus den Buchstaben des Baumes oder deren Inversen zusammensetzen kann, und alle $X \neq Y$ ausprobieren muß. Verwendet man jedoch Korollar 4.14, so kann man zu einer wesentlich stärkeren Aussage gelangen. Man kann nämlich dem Baum zu Sw ansehen, welches die nächste zu einer Verkürzung führende FRK sein muß. Zwei vollständig reduzierte Bäume zu globalkonjugierten Sphären unterscheiden sich nur durch eine Folge der Prozesse 4.14.1 und 4.14.2, von denen für einen festen Baum nur endlich viele möglich sind.

7.1.6 Wendet man auf $\Gamma(Sw)$ alle Operationen 4.14.1 und 2 an, so muß man auch $\Gamma(S\tilde{w})$ erhalten, und an diesem Baum kann man die letzte ausgeführte FRK ablesen, wie im Verlauf des Beweises zu 7.5 klar wird (vgl. insbesondere Behauptung 7.6.3).

Darüber hinaus zeigen wir in Satz 7.9, daß an dem Baum $\Gamma(S\tilde{w})$ nur Gewichte der Form $\pm X$ und $\pm Y$ vorkommen können. Damit wird die Operation 4.14.1 bestimmt. Weiter weiß man durch diesen Satz, daß die letzte ausgeführte FRK dann von der Form $c_X(z)$ oder $c_Y(z)$ mit $z \in Z$ gewesen sein muß.

Der sich so ergebene Algorithmentyp wird in 7.11 beschrieben. Er stellt gegenüber 7.8 eine Verbesserung dar, da hierbei nur die durch 4.14.2 aus $\Gamma(Sw)$ erzeugten Bäume zu untersuchen sind, was i.A. weniger Aufwand ist als bei der zuerst beschriebenen Vorgehensweise.

Wir kommen nun zu dem Beweis der Tatsache, daß es zu jeder Global-

konjugationsklasse von Sphären eine Folge von FRK's gibt, die einen zu dieser Klasse gehörenden vollständig reduzierten Baum durch ständigen Aufbau erzeugt.

7.2 LEMMA

Ist $\pi_1 = A * B * C$, so gibt es zu jeder Folge von FRK's eine Folge, die bis auf Globalkonjugationen die gleiche Wirkung auf das Sphärensystem hat, mit der Eigenschaft, daß im Anschluß an $c_X(y)$ eine FRK der Form $c_X(z)$ oder $c_Z(x)$ auszuführen ist.

Da Folgen von FRK's von rechts nach links gelesen werden, bedeutet dies, daß in einer solchen Folge von FRK's vor $c_X(y)$ nur FRK's der Form $c_X(z)$ und $c_Z(x)$, nicht aber FRK's der Form $c_Y(x)$, $c_Y(z)$, $c_X(\tilde{y})$ oder $c_Z(\tilde{y})$ stehen können.

BEWEIS

Man hat gemäß 2.7 FRK's des Typs: $c_A(b), c_A(c), c_B(a), c_B(c), c_C(a)$ und $c_C(b)$ zu betrachten. Nach Lemma 6.5 kann man $c_X(y)$ durch $c_{-X}(y^{-1}) = c_Z(y^{-1})$ ersetzen, wenn man moduló Globalkonjugationen und Automorphismen in den einzelnen Faktoren rechnet. Betrachtet man eine beliebige Folge von FRK's, so können vor $c_X(y)$ folgende FRK's stehen:

7.2.1 $c_X(\tilde{y})$

7.2.2 $c_X(z)$

7.2.3 $c_Y(x)$

7.2.4 $c_Y(z)$

7.2.5 $c_Z(x)$

7.2.6 $c_Z(\tilde{y})$

7.2.1 $c_X(\tilde{y})$ und $c_X(y)$ werden zu $c_X(\tilde{y}y)$ zusammengefaßt.

7.2.2 $c_X(z) \circ c_X(y)$ hat die gewünschte Form.

7.2.3 Nach 6.5 kann man $c_Y(x)$ durch $c_{-Y}(x^{-1}) = c_Z(x^{-1})$ (vgl. 6.3.1) ersetzen, wenn man aus der Folge der FRK's nach links eine Globalkonjugation und nach rechts einen Automorphismus eines der Faktoren (in diesem Falle X) herausschiebt. Den Automorphismus rechts von der Folge der FRK's kann man weglassen, ohne die zerlegenden Sphären zu verändern (vgl. 6.4), aber beim Herausschieben des Automorphismus von X werden alle Konjugationsfaktoren aus X abgeändert. Dabei kann keiner der Konjugationsfaktoren zu 1 werden und es ändert sich der Typ der betrachteten Folge nicht, d.h. an einer Stelle $c_W(\tilde{x})$ hat man dann $c_W(x')$ für W = Y oder Z und $x' = x\tilde{x}x^{-1} \neq 1$ aus X.

7.2.4 Mit der gleichen Argumentation wie in 7.2.3 ersetzt man nun $c_Y(z)$ durch $c_{-Y}(z^{-1}) = c_X(z^{-1})$.

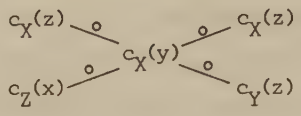
7.2.5 $c_Z(x) \circ c_X(y)$ hat die gewünschte Form.

7.2.6 Mit der gleichen Argumentation wie in 7.2.3 kann man $c_Z(\tilde{y})$ ersetzen durch $c_{-Z}(\tilde{y}^{-1}) = c_X(\tilde{y}^{-1})$ und dann wie in 7.2.1 zusammenfassen.

Die Aussage des Lemmas erhält man nun indem man von rechts beginnend die Umformungen 7.2.1 - 6 ausführt. Wird hierbei durch Zusammenfassen ($c_X(\tilde{y}) \circ c_X(y) = c_X(\tilde{y}y)$) eine der FRK's zu id, so beginnt man von vorn. Da hierbei jedesmal die Anzahl der FRK's in der Folge kleiner wird, erhält man schließlich eine Folge mit den gewünschten Eigenschaften. □

Lemma 7.2 sagt aus, daß man an der Stelle $c_X(y)$ in einer wie oben kon-

struierten Folge von FRK's folgende Situation hat:



7.3 LEMMA

Wendet man eine gemäß Lemma 7.2 konstruierte Folge von FRK's auf ein ursprünglich aus einer Silbe bestehendes Wort an, so wird die Silbenlänge dieses Wortes bei der Durchführung jeder einzelnen FRK nicht kleiner. Insbesondere ist nach der Durchführung von $c_X(y)$ als letzter FRK in dem so entstandenen Wort jede Silbe aus X von Silben aus Y umgeben.

BEWEIS

Wir beweisen durch vollständige Induktion nach der Anzahl k der ausgeführten FRK's den zweiten Teil der Behauptung, woraus dann die erste Aussage unmittelbar folgt.

k = 1:

Stammt die Silbe, aus der das Wort ursprünglich bestand, aus dem freien Faktor X, so haben nur FRK's der Form $c_X(y)$ eine Wirkung. Alle anderen können zu Beginn der Folge vernachlässigt werden. Wir haben also:

$$x \longmapsto y^{-1}xy,$$

was den Forderungen des Satzes genügt.

k > 1:

Nun sei die letzte bereits ausgeführte FRK von der Form $c_X(y)$, dann sind nach Voraussetzung in dem von der Folge der FRK's bis einschließlich $c_X(y)$ erzeugten Wort alle Silben aus X von Silben aus Y umgeben. Insbesondere bedeutet dies, daß niemals Silben aus Z und aus X zusammentreffen. Wegen Lemma 7.2 können nach $c_X(y)$ nur FRK's der Form $c_X(z)$ bzw. $c_Z(x)$ durchgeführt werden. Da Silben aus Z und aus X nicht nebeneinander stehen, kann hierbei keine Kürzung stattfinden, und die Behauptung folgt.

□

Da die Frage der Nichtverkürzung eines Wortes nur von eventuellen Kürzungsmöglichkeiten abhängt, gilt auch folgendes:

7.4 KOROLLAR

7.4.1 Sei w ein beliebiges Wort in A * B * C und y ein Wort aus einem Faktor von π_1, welches sich nicht aus den Buchstaben von w oder deren Inversen zusammensetzen läßt, dann ist die Silbenlänge von $c_X(y)(w)$ größer oder gleich der von w.

7.4.2 Sind in einem Wort w alle Silben aus X von Silben aus Y umgeben, so führt die Anwendung von $c_X(z)$ zu einer Nicht-Verkürzung (bzgl. Silbenlänge) des Wortes und in dem neuen Wort sind alle Silben aus X von Silben aus Z umgeben.

□

Im folgenden wollen wir die Entwicklung des Baumes zu S_1 unter einer Folge von FRK's, die die Forderungen von Lemma 7.2 erfüllt, betrachten. Die Beschränkung auf Bäume zur Sphäre S_1 stellt, wie bereits erwähnt, keine Einschränkung dar, da man nach geeigneter Umnumerierung im Fall

$n = 3$ stets annehmen kann, daß eine eingebettete Sphäre ein Konjugiertes von A abspaltet. Der Baum zu S_1 sieht wie folgt aus:

BP . (1,0,0) bzw. BP (A)

7.5 SATZ

Eine gemäß 7.2 konstruierte Folge von FRK's bewirkt bei einem aus BP (A) entstandenen vollständig reduzierten Baum Γ eine Verlängerung (bzgl. vollständig reduzierter Länge) bei der Durchführung von jeder einzelnen FRK aus der Folge.

BEWEIS

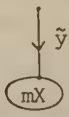
Wir zeigen durch vollständige Induktion nach der Anzahl der FRK's in der Folge die folgende Behauptung:

7.6 BEHAUPTUNG

Es sei $c_X(y)$ die zuletzt durchgeführte FRK, dann gilt:

7.6.1 In Γ sind alle Silben aus X von Silben aus Y umgeben.

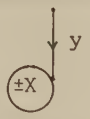
7.6.2 Alle Extremitäten (das sind Enden des Baumes) sind von der Form:



$\tilde{y} \in Y,\ 0 \neq m \in \mathbf{Z}.$

Hierbei bedeutet mX für den Rest des Beweises ein Gewicht mit der Komponente m an der X entsprechenden Stelle (vgl. Schreibweise 5.3).

7.6.3 Es gibt mindestens eine Extremität der Form:



BEWEIS VON BEHAUPTUNG 7.6

k = 1:

Da wir nur die Veränderungen der Sphäre S_1 betrachten wollen (s.o.), also Zerlegungen der Form $w_1^{-1}Aw_1 * (w_2^{-1}Bw_2 * w_3^{-1}Cw_3)$ mit $w_i \in \pi_1$, für i = 1, 2, 3, muß die erste auszuführende FRK von der Form $c_C(a)$ oder $c_B(a)$ sein, da alle anderen FRK's entweder keine Wirkung haben oder durch eine Globalkonjugation (= vollständige Reduktion) wieder rückgängig gemacht werden können.

$c_B(a)$: BP (AB̂) a (-B) $c_C(a)$: BP (AC) a (-C)

Die Operationen sind in 5.3.5 und 5.3.6 beschrieben. Diese beiden Bäume sind vollständig reduziert und erfüllen die Bedingungen 7.6.1 - 3, und der vollständig reduzierte Baum ist länger geworden.

k > 1:

Die zuletzt ausgeführte FRK sei $c_X(y)$ und der so entstandene Baum erfülle die Bedingungen 7.6. Nach Lemma 7.2 kann man davon ausgehen, daß auf $c_X(y)$ nur FRK's der Form $c_X(z)$ und $c_Z(x)$ folgen können.

Wir betrachten folgende Teile des Baumes getrennt:

(i) Äste (das sind Teilstücke des Baumes ohne Verzweigungen, die vom Basispunkt oder einem Verzweigungspunkt zu einer Extremität reichen)

(ii) Verzweigungen

(iii) Basispunkt (hier sind eventuell Verkürzungen durch vollständige Reduktionen möglich)

(iv) Extremitäten

Die einzelnen Fälle sind in Tabelle 7.6.4 zusammengefaßt (s. S. 63).

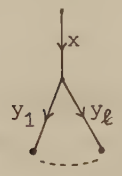
7.6.5:

Für die Untersuchung von (i) werden die FRK's $c_X(z)$ und $c_Z(x)$ gemeinsam betrachtet. Hier gilt die Behauptung 7.6.1 nach Korollar 7.4.2; 7.6.2 und 3 sind nicht zu überprüfen (vgl. iv).

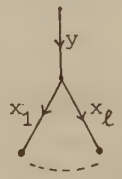
7.6.6:

Wir betrachten den Fall (ii) und die FRK $c_X(z)$:

Wir brauchen uns nur für Verzweigungen zu interessieren, an denen Kanten aus X anstoßen, denn die anderen bleiben unverändert. Hier gibt es zwei Möglichkeiten:



bzw.



denn Silben aus X dürfen nicht auf Silben aus Z treffen (Induktionsvoraussetzung 7.6.1), und Γ ist vollständig reduziert (vgl. insb. 4.2.2).

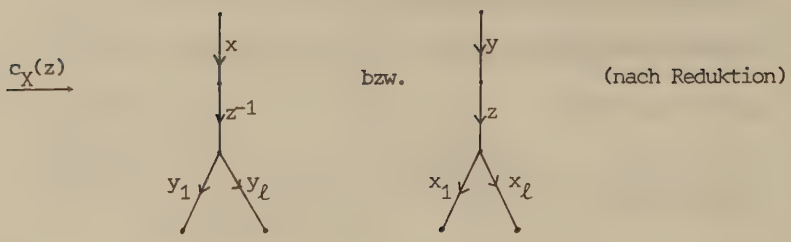
7.6.4 Tabelle zum Beweis von 7.6

Induktionsschritt $k \to k+1$

bereits ausgeführt: $c_X(y)$

neu auszuführen : $c_X(z)$ oder $c_Z(x)$

auszuführende FRK / untersuchtes Teilstück des Baumes	$c_X(z)$	$c_Z(x)$	Bemerkungen	
(i) Äste	7.6.5	7.6.5	$\Rightarrow$ 7.6.1	Hier gilt die Behauptung 7.6.1 nach Korollar 7.4.2
(ii) Verzweigungen	7.6.6	7.6.7	$\Rightarrow$ 7.6.1	
(iii) Basispunkt	7.6.8	7.6.8	$\Rightarrow$ 7.6.1	Es wird gezeigt, daß am Basispunkt bereits nach der zweiten FRK eine Verzweigung mit Kanten aus verschiedenen freien Faktoren entsteht, die dann unter (ii) behandelt werden kann
(iv) Extremitäten				
alte	7.6.9	7.6.9	$\Rightarrow$ 7.6.2, 7.6.3, 7.6.10	Hier findet das einzige Mal eine echte Verlängerung statt!
neue	7.6.11, 7.6.12	7.6.11, 7.6.13	$\Rightarrow$ 7.6.2, 7.6.13	Stachel-Ausfahren (durch Reduktion fallen unter gewissen Umständen neue Extremitäten gleich wieder weg)



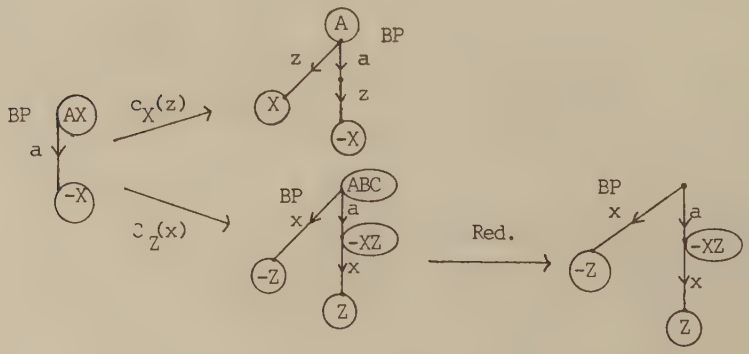
7.6.7:

Im Fall (ii) argumentiert man für die FRK $c_Z(x)$ wie in 7.6.6, da nun an Verzweigungspunkten an denen Kanten aus Z anstoßen, keine Kanten aus X anstoßen können (Induktionsvoraussetzung 7.6.1).

7.6.8:

Für den Basispunkt (iii) werden die Fälle $c_X(z)$ und $c_Z(x)$ wieder gemeinsam behandelt:

Es müssen hier Verkürzungen durch Globalkonjugationen (vollständige Reduktion) nach der Durchführung einer FRK ausgeschlossen werden. Ist die erste ausgeführte FRK von der Form $c_X(a)$ mit X = B oder X = C, so erhält man für $z \notin A$ bzw. $Z \neq A$ bei der Durchführung der zweiten FRK, die von der Form $c_X(z)$ bzw. $c_Z(x)$ sein muß:

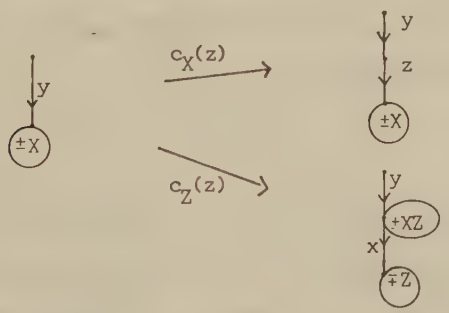


Zur Entstehung des ersten Baumes vergleiche k = 1. Da nach der Definition der FRK's X ≠ Z sein muß, und X und Z die Gruppen B oder C sein können erklärt sich im zweiten Fall das Entstehen des Gewichtes ABC am Basispunkt. Zu den Operationen vergleiche 5.3.5 und 5.3.6. Da Verzweigungen nach dem bisher bewiesenen nicht mehr wegfallen können (s.o.), muß man den Basispunkt im weiteren nicht mehr gesondert betrachten, sondern er wird unter (ii) mitbehandelt, da bereits nach der zweiten durchgeführten FRK eine nicht mehr verschwindende Verzweigung entsteht.

7.6.9:

Nun werden Extremitäten untersucht und wir behandeln zunächst die FRK's $c_X(z)$ und $c_Z(x)$ gemeinsam:

Nach 7.6.3 gibt es mindestens eine Extremität der Form:

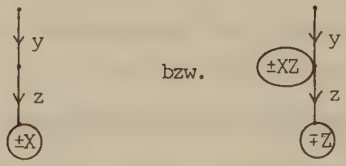


Aus der nach Induktionsvoraussetzung existierenden Extremität erhält man also wieder eine Extremität, die 7.6.3 erfüllt. An dieser Stelle findet eine echte Verlängerung der vollständig reduzierten Länge des Baumes statt.

Wichtig für die Formulierung des Algorithmus 7.11 ist folgende Aussage:

7.6.10:

Da das Ende von y kein Verzweigungspunkt war (es sollte sich um eine Extremität handeln), ist der Punkt am Anfang von z bzw. x auch kein Verzweigungspunkt.

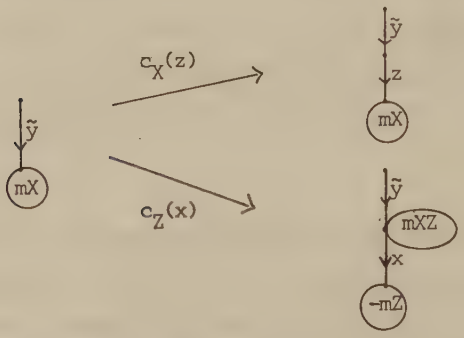


Es bleiben noch die übrigen nach der Durchführung von $c_X(y)$ bereits vorhandenen (1) und die neu-entstehenden Extremitäten (2) zu untersuchen.

7.6.11:

Wir untersuchen $c_X(z)$ und $c_Z(x)$ gemeinsam.

zu (1): Nach 7.6.2 sind nach der Ausführung von $c_X(y)$ alle übrigen Extremitäten von der Form:



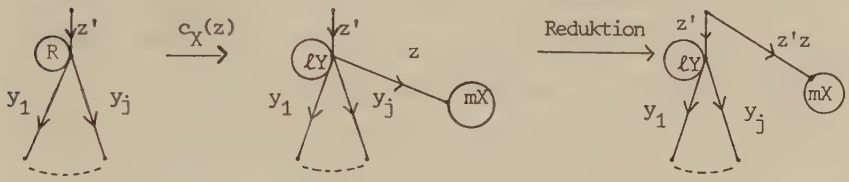
Die so entstandene Extremität erfüllt wieder 7.6.2.

zu (2): Hier sind $c_X(z)$ und $c_Z(x)$ getrennt zu betrachten:

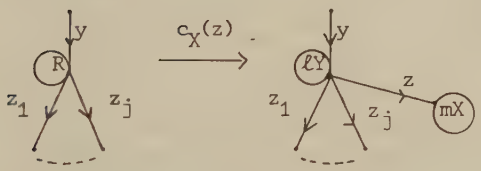
7.6.12:

Es werde zunächst $c_X(z)$ behandelt.

Sei R ein Gewicht der Form $R = m_1X + m_2Y + m_3Z$, welches wir uns wie folgt zerlegt vorstellen wollen: $R = m_3(X+Z) + m_1'X + m_2Y = (m_2 - m_3)Y + m_1'X$, denn es ist $X + Z = -Y$. Das Gewicht R habe also ohne Einschränkung die Form $R = mX + \ell Y$; $m, \ell \in \mathbb{Z}$. Es sind folgende Situationen zu betrachten:



bzw.

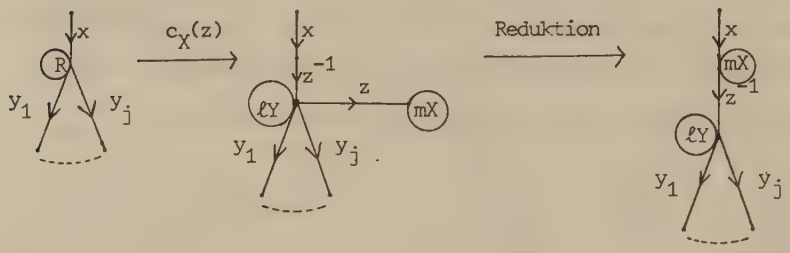


Ist $z'z = 1$ oder eines der $z_i = z$, muß weiter reduziert werden und man erhält keine neuen Extremitäten, da die Enden der z_i nach Induktionsvoraussetzung 7.6.2-3 keine Extremitäten gewesen sein können.
Ferner hat man noch:

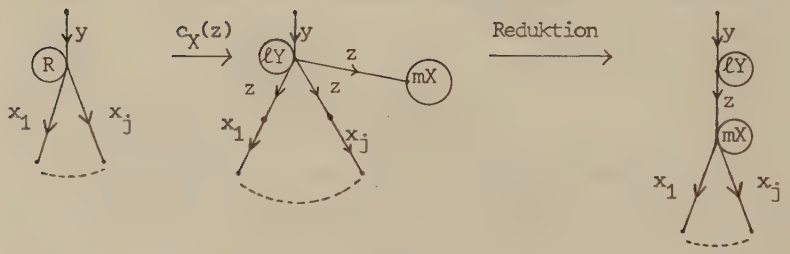
7.6.13:

Ist bei einer Extremität die Kante die zu mX führt zwar aus Z aber nicht gleich z, so ist der Anfang dieser Kante ein Verzweigungspunkt, an dem weitere Kanten aus Z beginnen.

Nun muß man noch Verzweigungspunkte mit Kanten aus X und Y betrachten, an denen das Gewicht R liegen kann:



bzw.



Es entstehen also keine neuen Extremitäten. Wegen Induktionsvoraussetzung 7.6.1 sind die oben betrachteten Situationen die einzig möglichen.

7.6.14:

Für die FRK $c_Z(x)$ argumentiert man im Fall (2) wie in 7.6.12, allerdings mit folgender Zerlegung von R:

$R = m_1X + m_2Y + m_3Z = (m_2 - m_1)Y + m_3'Z$, m_i und $m_3' \in \mathbb{Z}$.

Damit ist der Beweis von Behauptung 7.6 beendet. Die Aussage von 7.5 folgt nun daraus, daß bei allen oben beschriebenen Veränderungen eine Nicht-Verkürzung der vollständig reduzierten Länge des betrachteten

Baumes und bei der stets vorkommenden Extremität der Form 7.6.3 eine echte Verlängerung stattfand.

□

Analog zu 7.4.1 gilt:

7.7 KOROLLAR

Ist y ein Wort aus Y, welches sich nicht aus den Buchstaben oder deren Inversen eines bereits vorhandenen Baumes Γ zusammensetzen läßt, so führt die Anwendung von $c_X(y)$ für alle freien Faktoren $X \neq Y$ zu einer Nicht-Verkürzung der vollständig reduzierten Länge von Γ.

□

Nun kann man den eingangs beschriebenen gröberen Typ eines Algorithmus formulieren:

7.8 THEOREM

Sei $\pi_1 = A * B * C$ ein freies Produkt aus 3 unendlichen, unzerlegbaren Faktoren ungleich $\mathbb{Z}$, dann kann man durch folgenden Algorithmus entscheiden, ob ein bzgl. des Standarderzeugendensystems (zur Zerlegung $A * B * C$) gegebenes Element S aus π_2 durch eine Einbettung realisierbar ist:

7.8.1 Es werde der Augmentierungshomomorphismus $\alpha: \mathbb{Z}\pi_1 \to \mathbb{Z}$ auf den Koeffizienten ausgewertet (vgl. 3.5).
Läßt sich nach Addition eines geeigneten Vielfachen von $(S_1 + S_2 + S_3) = 0$ und eventueller Umnumerierung nicht erreichen, daß α den Wert (1,0,0) liefert, so ist S nicht durch eine Einbettung realisierbar. Im folgenden sei also angenommen, daß S ein Konjugiertes von A abspaltet.

7.8.2 Man zeichne einen Baum zu S (vgl. 4.8.2-3) und reduziere ihn vollständig: Γ.

7.8.3 Ist Γ von der Form BP$\textcircled{A}$, so ist man fertig, da S zu S_1 global-konjugiert und damit einbettbar ist.

7.8.4 Für alle in Γ vorkommenden Buchstaben und Buchstabenkombinationen $y \in Y$ und alle Gruppen $X \in Y$ versuche man die FRK's $c_X(y)$ und $c_X(y^{-1})$. Führt keine dieser FRK's (es sind nur endlich viele, weil Γ nur endlich viele Kanten und jede Kante nur endlich viele Buchstaben hat) zu einer Verkürzung der völlständig reduzierten Länge von Γ, so läßt sich S nicht durch eine Einbettung realisieren (denn alle anderen denkbaren FRK's können nach Korollar 7.7 nicht zu einer Verkürzung führen).

7.8.5 Führen eine oder mehrere der in 7.8.4 beschriebenen FRK's zu einer Verkürzung, so fahre man mit dem neuen (kürzeren!) Baum bei 7.8.3 fort.

7.8.6 Der Prozeß endet nach endlich vielen Schritten entweder mit der Entscheidung, daß S nicht-einbettbar ist oder in 7.8.3 mit dem Baum BP$\textcircled{.A}$.

Tatsächlich kann man sehr viel genauer ablesen, welcher Prozeß zu einer Verkürzung führt, wenn man die Prozesse 4.14.1 und 2 berücksichtigt, wie auch die in 7.6 bewiesenen Eigenschaften des durch ständigen Aufbau entstandenen Baumes. Zunächst werden nun die Gewichte eingehender untersucht.

7.9 SATZ

Die Symbole X,Y,Z mögen stets verschiedene der Gruppen A, B oder C bezeichnen. Unter dem Abstand zweier Gewichte in einem Baum Γ verstehen wir die Silbenlänge eines die zugehörigen Punkte verbindenden Kantenweges (meist ist dies die Anzahl der Kanten zwischen Gewichten).

Ist $c_X(y)$ die letzte durchgeführte FRK einer gemäß 7.2 konstruierten Folge von FRK's, so hat ein aus BP$\langle$A$\rangle$ entstandener vollständig reduzierter Baum folgende Eigenschaften:

7.9.1 Alle Gewichte sind von der Form ±X und ±Z.

7.9.2 Neben jedem Gewicht ±Z findet man im Abstand 1 genau ein Gewicht der Form ±X und alle Gewichte haben von ±Z mindestens den Abstand 2. Solche zwei Gewichte werden als Paar bezeichnet und die Silbe zwischen ihnen stammt aus Y.

7.9.3 Zwischen zwei Paaren liegt stets ein Kantenweg, dessen Silben aus allen 3 freien Faktoren stammen (d.h. dies gilt für beide Gewichte aus beiden Paaren).

7.9.4 Liegt zwischen zwei Einzelgewichten (diese müssen dann von der Form ±X sein nach 7.9.2) oder zwischen einem Einzelgewicht und einem Paar ein Kantenweg, dessen Silben nur aus zweien der drei freien Faktoren vom π_1 stammen, so sind diese Faktoren Y und Z und der Kantenweg beginnt oder endet beim Gewicht ±X mit einer Silbe aus Y. Solch ein Wort hat mindestens die Silbenlänge zwei.

BEWEIS

Induktion nach der Anzahl k der FRK's in der Folge.

k = 0:

BP(A) hier ist nichts zu zeigen.

k = 1:

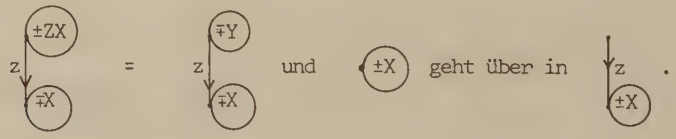
Vergleiche hierzu Behauptung 7.6, k = 1. Wir benutzen die Relation (AB) = (-C) und erhalten die gewünschte Aussage.

k > 1:

Wir nehmen an, daß $c_X(y)$ die letzte ausgeführte FRK ist. Nach Induktionsvoraussetzung hat der so entstandene Baum die im Satz angegebene Form. Wegen Lemma 7.2 ist die nächste auszuführende FRK von der Form $c_X(z)$ oder $c_Z(x)$. Diese Fälle werden getrennt untersucht:

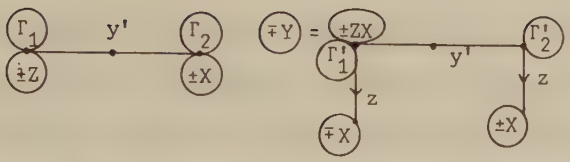
7.9.5 $c_X(z)$:

Unter $c_X(z)$ geht das Gewicht (±Z) über in

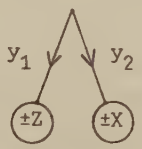


Andere Gewichte kommen in dem Baum nach Voraussetzung nicht vor. Man hat also, wenn keine Additionen von Gewichten bei Reduktionen mehr vorkommen (was noch gezeigt wird), bereits die in 7.9.1 geforderte Form. (Die Behauptung sieht nun natürlich etwas anders aus, da die FRK $c_X(z)$ durchgeführt wurde.) Im einzelnen hat man folgende Veränderungen:

Paare werden wie folgt abgeändert:



Γ_1' und Γ_2' sind hier die durch die Anwendung der FRK $c_X(z)$ aus Γ_1 und Γ_2 hervorgegangene Bäume. Der Punkt in der Mitte von y' soll andeuten, daß Paare auch wie folgt aussehen können:



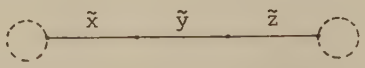
Da es bei den hier ausgeführten Betrachtungen auf die Kantenrichtungen nicht ankommt, werden sie nicht eingezeichnet und der oben beschriebene Fall braucht nicht gesondert behandelt zu werden.

Einzelgewichte sind von der Form ±X und gehen in Einzelgewichte der Form über.

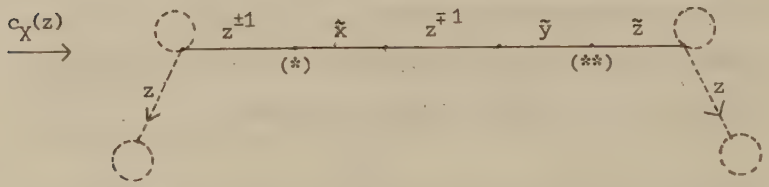
Damit sind (wenn keine Gewichte aufeinandertreffen) die Behauptungen 7.9.1 und 2 (bis auf die Abstandsbehauptung in 2, die bei der Untersuchung von 3 und 4 mitbewiesen wird) gezeigt.

Betrachtet man das oben abgewandelte Paar, so stellt man fest, daß das neu entstandene Einzelgewicht ±X von ±Y aus dem neuentstandenen Paar den Abstand 2 hat. Das Wort zwischen den beiden Gewichten stammt aus Y * Z und endet oder beginnt bei ±X in Z. Dies gilt auch für ±X aus dem neuen Paar und das Einzelgewicht ±X. Somit ist 7.9.4 an dieser Stelle

erfüllt. Tritt in Γ_1 als nächstes Gewicht ein Gewicht aus einem Paar auf, so muß der ursprüngliche Abstand mindestens 3 betragen und der Kantenweg zwischen den beiden Paaren muß Silben aus allen drei Faktoren enthalten haben. Da wegen 7.6.1 Silben aus X nicht auf Silben aus Z treffen können, hat ein minimaler Kantenweg aus allen drei Faktoren folgende Form:



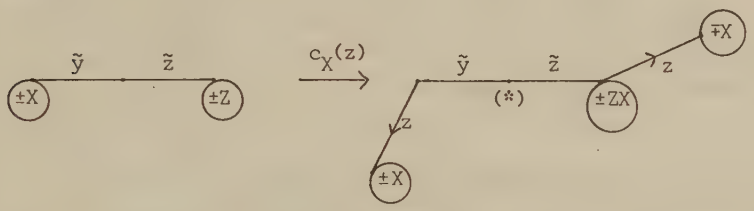
(Befindet sich ein längerer Kantenweg zwischen den beiden Gewichten, so findet man mindestens eine Stelle der oben beschriebenen Form.)



Der Exponent von z hängt von der Richtung des Baumes ab. Richtungspfeile werden nicht eingezeichnet, da dieselbe Argumentation für beide Richtungen gilt. Aus dem gleichen Grund findet keine Festlegung statt, an welchem Ende des oben gezeichneten Teilbaumes sich ±Z und wo sich das Paar befindet. Selbst wenn durch Reduktion (z wird auf z^{-1} oder z geklappt) Gewichte an die Stellen (*) oder (**) gelangen oder sich bei (**) eine neue Verzweigung bildet, bleibt ein Weg aus allen 3 Faktoren zwischen den Gewichten mindestens bestehen, so daß 7.9.3 gilt. Mit der gleichen Argumentation zeigt man, daß die Eigenschaft, daß zwischen ±Z und einem Einzelgewicht ein Kantenweg

aus allen drei Faktoren liegt, unter $c_X(z)$ erhalten bleibt.[1]

Es bleibt der Fall zu untersuchen, daß in Γ_1 zwischen $\pm Z$ und einem Einzelgewicht ein Kantenweg liegt, dessen Silben nur aus Y und Z stammen, der aber mindestens die Länge zwei hat und der bei $\pm X$ mit einer Kante aus Y beginnt oder endet. Der mögliche Minimalfall sieht dann wie folgt aus:

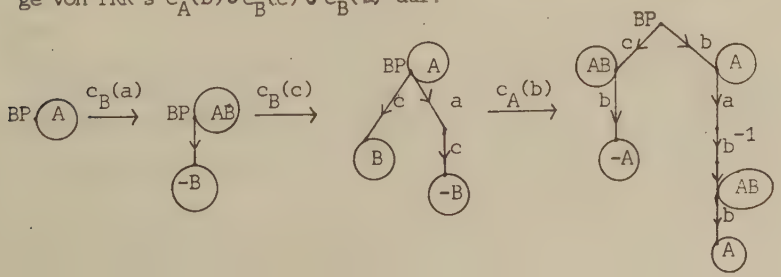


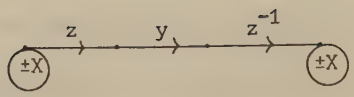
Selbst wenn durch Reduktion (z wird auf z oder z^{-1} geklappt) ein Gewicht an die Stelle (*) gelangt oder (*) zu einem Verzweigungspunkt wird, ist doch wieder 7.9.4 erfüllt.

Dieselben Überlegungen kann man für Γ_2 anstellen.
Für zwei Einzelgewichte (Abstand mindestens 2!) argumentiert man ebenfalls wie oben, da stets ein in Y beginnender oder endender Kantenweg zwischen ihnen liegen muß, der Silben aus Y und Z enthält, oder ein Kantenweg, der Silben aus allen drei Faktoren enthält. Eine Situation:

---

[1] Die Situation, daß zwischen einem Paar und einem Einzelgewicht ein Wort aus allen drei Faktoren liegt, tritt beispielsweise bei der Folge von FRK's $c_A(b) \circ c_B(c) \circ c_B(a)$ auf:

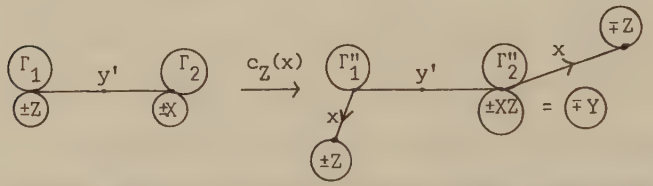




bei der sich der Abstand der Einzelgewichte unter $c_X(z)$ (und anschließender Reduktion) von 3 auf 1 verringern würde, kann also nicht vorkommen.

7.9.6 $c_Z(x)$:

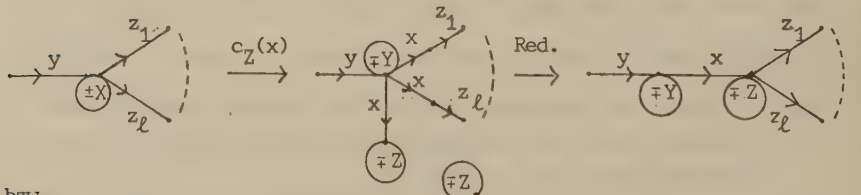
Paare werden wie folgt abgewandelt:



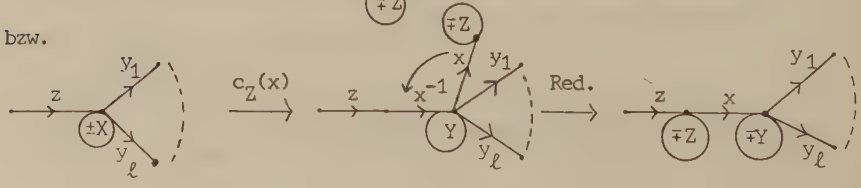
hierbei sind die Γ''_1 und Γ''_2 die unter $c_Z(x)$ abgeänderten Bäume Γ_1 und Γ_2. (Der Punkt innerhalb von y' erklärt sich wie in 7.9.5.)

Einzelgewichte

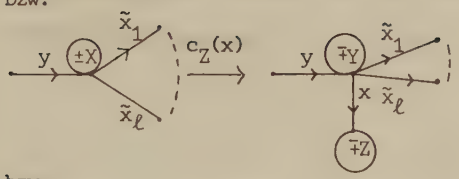
Hier zeigt sich, daß die beiden Fälle $c_X(z)$ und $c_Z(x)$ nicht symmetrisch sind, denn Einzelgewichte gehen über in Paare:



bzw.

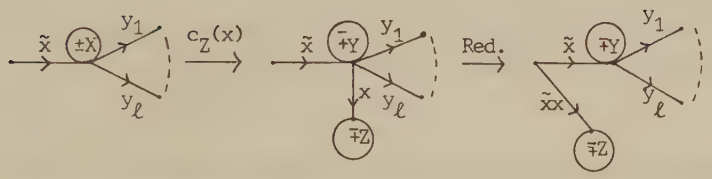


bzw.



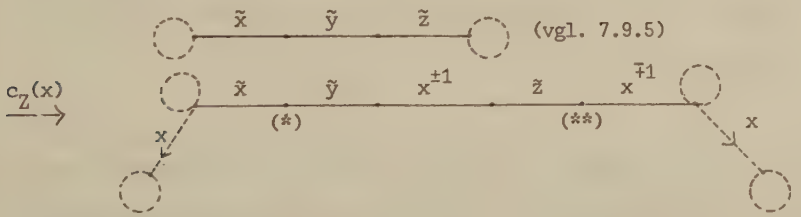
(Bei einer Reduktion wird eventuell x auf $\tilde{x}_i$ geklappt)

bzw.



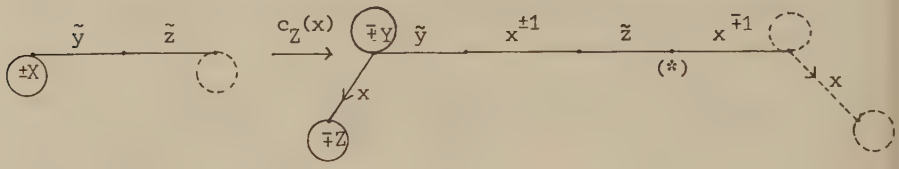
In dem letzten Fall bilden ∓Y und ∓Z auch dann ein Paar, wenn $\tilde{x}x \neq 1$ ist, denn es liegt nur eine Silbe zwischen ihnen. Wegen 7.6.1 sind die obigen Kombinationen die einzig möglichen.

Liegt zwischen zwei Gewichten ein Wort aus allen drei Faktoren, so bleibt diese Eigenschaft erhalten, denn wegen 7.6.1 kann der Minimalfall (Abstand 3) nur wie folgt aussehen:



Selbst wenn bei Reduktionen Gewichte an die Stelle (*) und (**) gelangen oder (*) zu einem Verzweigungspunkt wird, bleibt zwischen den Gewichten ein Kantenweg aus allen 3 Faktoren erhalten, was 7.9.3 zeigt. Wenn zwischen einem Einzelgewicht und einem Paar oder zwischen zwei Einzelgewichten ein Kantenweg liegt, der nur Silben aus Y und Z

enthält und der bei ±X mit einer Silbe aus Y beginnt oder endet und mindestens die Länge 2 hat (vgl. 7.9.4), so muß man folgenden Minimalfall betrachten:



(Der Exponent von x hängt von der Orientierung des Baumes ab.) Selbst wenn bei Reduktionen ein Gewicht an die Stelle (*) gelangt, genügt der oben angegebene Teilbaum der Forderung 7.9.3 des Satzes.

Die einzige Situation, in der im vorliegenden Fall ein Kantenweg zwischen zwei Gewichten nicht Silben aus allen 3 Faktoren enthält (Abstand 1 ausgenommen), entsteht aus einem ehemaligen Paar (s.o.). Der Kantenweg enthält dort Silben aus X und Y und beginnt oder endet beim Gewicht ±Z in X, was der Bedingung 7.9.4 genügt. Damit ist auch im Fall $c_Z(x)$ alles beweisen.

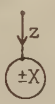
□

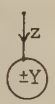
Die bisher beschriebene Struktur des vollständig reduzierten Baumes zu einem einbettbaren Element von π_2 stellt ein stärkeres notwendiges Kriterium dar als 3.5 und 3.6 und soll daher nochmals zusammengefaßt werden.

7.10 KOROLLAR

7.10.1 In der Normalform (vgl. 4.4.2) zu einem einbettbaren Element von π_2 müssen alle $|m_{ij}| = 1$ sein.

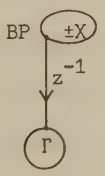
7.10.2 Ein vollständig reduzierter Baum zu einem einbettbaren Element von π_2 hat (eventuell nach der Anwendung von 4.14.1) die in 7.9.1-4 beschriebene Form. Insbesondere müssen alle Gewichte von der Form ±X und ±Y sein (d.h. die dritte Gruppe kommt nicht vor).

7.10.3 Kommen nur die Gewichte ±X und ±Y vor, so müssen alle Extremitäten entweder von der Form 

oder von der Form 

mit $z \in Z$ sein. (Es sei $\ell(\Gamma) \geq 1$ vorausgesetzt, vgl. 7.9, k = 0.)

7.10.4 Bei mindestens einer dieser Extremitäten darf der Anfangspunkt von z kein Verzweigungspunkt sein, an dem weitere Silben aus Z beginnen, oder es muß am Basispunkt folgende Situation vorliegen:



7.10.5 An allen Stellen, die der Bedingung aus 7.10.4 genügen, ist die Silbe z gleich.

BEWEIS

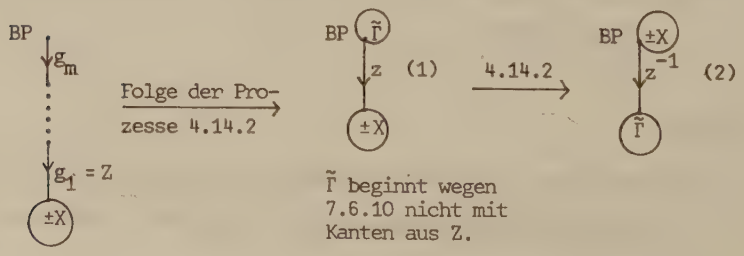
7.10.1 Zum Element S in Normalform möge das Element Sw mit einem vollständig reduzierten Baum gehören. Durch Multiplikation mit w än-

dern sich die m_{ij} in der Normalform nicht. Zu Sw gibt es einen vollständig reduzierten Baum, der den Forderungen aus 7.9 genügt. Die zugehörige Normalform von Sw hat die gewünschte Eigenschaft, weil in dem betrachteten Baum alle Gewichte von der Form ±X und ±Y, d.h. $m_{ij} = \pm 1$ sind. Dann haben wegen Bemerkung 4.5 alle Normalformen zu Sw und damit nach dem oben gesagten auch alle Normalformen zu S die gewünschte Eigenschaft.

7.10.2 folgt unmittelbar aus 7.9 und 4.14, da die Operation 4.14.2 die Abstände der Gewichte nicht verändern kann.

7.10.3 Nach Satz 7.9 können nur dann die Gewichte ±X und ±Y vorkommen, wenn die letzte ausgeführte FRK von der Form $c_X(z)$ oder $c_Y(z)$ war und die Aussage folgt aus 7.6.2, wenn man noch berücksichtigt, daß bei dem in 7.6 konstruierten Baum bereits nach dem zweiten Schritt am Basispunkt eine Verzweigung mit Kanten aus zwei verschiedenen Faktoren entstand, also ein Gewicht am Basispunkt nicht durch den Prozeß 4.14.2 zur Extremität werden kann. Für Bäume der Länge 1 ist die Aussage trivial (vgl. 7.6, k = 1).

7.10.4 ergibt sich mit der gleichen Argumentation wie in 7.10.3 aus 7.6.3 und 7.6.10, wobei zu beachten ist, daß eine Extremität des Baumes aus 7.6 durch eine Folge der Prozesse 4.14.2 an den Basispunkt gebracht werden kann:



(1) Obwohl der Anfangspunkt von z nach 7.6.10 kein Verzweigungspunkt sein kann, wird er durch eine Folge der Prozesse 4.14.2 zu einem (und zwar dem Basispunkt). Es können nun aber nur weitere Silben nicht aus Z an diesem Punkt beginnen.

(2) Dies ist die zweite in 7.10.4 beschriebene Situation.

7.10.5 folgt aus 7.6.13. □

Mit Hilfe von Korollar 7.10 kann man nun einen verbesserten Algorithmus formulieren:

7.11 THEOREM

Sei $\pi_1 = A * B * C$ ein freies Produkt aus 3 unendlichen, unzerlegbaren Faktoren ungleich $\mathbb{Z}$, dann kann man durch folgenden Algorithmus entscheiden, ob ein bzgl. des Standarderzeugendensystems (zur Zerlegung $A * B * C$) gegebenes Element S aus π_2 durch eine Einbettung realisierbar ist:

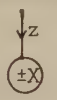
7.11.1 Es werde der Augmentierungshomomorphismus $\alpha: \mathbb{Z}\pi_1 \to \mathbb{Z}$ auf den Koeffizienten ausgewertet (vgl. 3.5).
Läßt sich nach Addition eines geeigneten Vielfachen von $(S_1 + S_2 + S_3) = 0$ und eventueller Umnumerierung nicht erreichen, daß α den Wert (1,0,0) liefert, so ist S nicht durch eine Einbettung realisierbar. Im folgenden sei also angenommen, daß S ein Konjugiertes von A abspaltet.

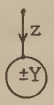
7.11.2 Man zeichne einen Baum zu S (vgl. 4.8.2-3) und reduziere ihn vollständig: Γ.

7.11.3 Ist Γ von der Form BP (A), so ist man fertig, da S zu S_1 global-

konjugiert und damit einbettbar ist.

7.11.4 Nach der Anwendung von 4.14.1 müssen alle Gewichte von der Form ±X und ±Y sein, sonst ist S nicht durch eine Einbettung realisierbar. (Nun weiß man nach 7.9 bereits, daß eine zur Verkürzung führende FRK von der Form $c_X(z)$ bzw. $c_Y(z)$ sein muß.)

7.11.5 Alle Extremitäten müssen entweder von der Form 

oder von der Form 

sein (o.E. möge der erste Fall eintreten), sonst ist S nicht durch eine Einbettung realisierbar.

7.11.6 Nun versuche man die FRK $c_X(z^{-1})$, wobei z gemäß 7.10.4-5 bestimmt wird. Läßt sich ein solches z nicht ermitteln oder führt $c_X(z^{-1})$ nicht zu einer Verkürzung der vollständig reduzierten Länge des Baumes, so ist S nicht durch eine Einbettung realisierbar.

7.11.7 Führt $c_X(z^{-1})$ zu einer Verkürzung, so beginne man erneut bei 7.11.3.

7.11.8 Da die Länge des ursprünglichen Baumes endlich war, gelangt man nach endlich vielen Schritten zum Baum BP(A) und damit zu der Entscheidung, daß S einbettbar ist, oder man entscheidet, daß S nicht einbettbar ist.

□

Der in 7.11 beschriebene Algorithmus stellt gegenüber 7.8 insofern eine Verbesserung dar, als er die Möglichkeit liefert, die zu einer Verkürzung führende FRK aus dem Baum direkt zu bestimmen.

Bei beiden Algorithmentypen bietet sich darüber hinaus noch die Möglichkeit, die von der als einbettbar identifizierten Sphäre induzierte Zerlegung von π_1 zu bestimmen.

7.12 KOROLLAR

Man kann von einer Einbettung S, die bzgl. des Erzeugendensystems S_1, S_2, S_3 zu $\pi_1 = A * B * C$ gegeben ist, bestimmen, in welche Gruppen sie π_1 zerlegt.

BEWEIS

Man wendet die zu den in 7.8 bzw. 7.11 bestimmten FRK's inverse Folge auf $\pi_1 = A * B * C$ an, wobei man eventuell vorgenommene Globalkonjugationen (= vollständige Reduktionen) mit berücksichtigt.

□

8. Der Fall $n > 3$

Wir beweisen für den allgemeinen Fall einen Algorithmus des Typs 7.8, der die Entscheidung gestattet, ob ein vorgegebenes Element aus π_2 zu einer gewissen, noch näher zu spezifizierenden Klasse von einbettbaren Elementen gehört. Die Argumentation ist die gleiche wie die zu Beginn des Kapitels 7 beschriebene.

8.1

Die wesentlichen Unterschiede zwischen dem Fall $n = 3$ und $n > 3$ sind die folgenden:

8.1.1 Es ist nicht mehr $c_{-X}(y) = c_Z(y)$ sondern

$c_{-G_1}(g_2) = c_{G_3}(g_2) \circ \ldots \circ c_{G_n}(g_2)$, vgl. Bezeichnung 6.3.

8.1.2 Als Folge davon gewinnen die Relationen 2.6.2 und 3 an Bedeutung. Im Fall $n = 3$ war $c_X(y) \circ c_Z(y) \hat{=} k(y)$.

8.1.3 In einer Folge von FRK's stehen nicht mehr nur Elemente nebeneinander, die nicht kommutieren, sondern es gibt (vgl. 8.6) ganze Sequenzen $c_{G_{i1}}(g_{j1}) \circ \ldots \circ c_{G_{ik}}(g_{jk})$, $g_{j\ell} \in G_j$, von kommutierenden Elementen.

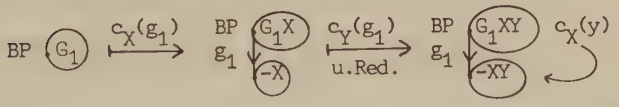
8.1.4 Daher gilt ein Analogon zu Lemma 7.3 nicht, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$y^{-1}xy \xmapsto{c_X(z)} y^{-1}z^{-1}xzy \xmapsto{c_Y(z)} z^{-1}y^{-1}xyz$$

Nach der Durchführung von $c_Y(z)$ ist nicht jede Silbe aus Y von Silben aus Z umgeben.

8.1.5 Ferner kann es passieren, daß eine FRK keine Wirkung hat, obwohl

sie mit der vorhergehenden nicht vertauscht, wie folgendes Beispiel zeigt:



Im letzten Schritt verändert sich der Baum nicht, obwohl $c_X(y)$ weder mit $c_X(g_1)$ noch mit $c_Y(g_1)$ kommutiert.

Auf Grund dieser Besonderheiten ist es mir nur für bestimmte Folgen von FRK's möglich, die Argumentation aus Kapitel 7 zu verallgemeinern. Die Eigenschaften dieser Folgen sollen nun beschrieben werden.

8.2 DEFINITION

In einer Folge von FRK's heißten zwei FRK's c_1 und c_2 *benachbart*, wenn man sie durch die Kommutator-Relation 2.6.1 zusammenschieben kann. (Hier ist sowohl Verschieben nach links als auch Verschieben nach rechts gestattet.)

8.3 ANNAHME

Von nun an betrachten wir nur noch Folgen von FRK's, die folgenden Bedingungen genügen:

Benachbarte Konjugationen haben folgendes Aussehen:

8.3.1 $c_X(y) \circ c_U(v)$ mit $X \neq U, V$; $U \neq X, Y$ und $y \neq v$,

8.3.2 $c_X(y) \circ c_X(z)$ mit $z \in Y$,

8.3.3 $c_X(y) \circ c_Y(z)$ mit $z \in X$,

8.3.4 $c_X(y) \circ c_Y(x)$.

8,4 BEMERKUNG

8.4.1 Im Fall 8.3.1 kommutieren die Konjugationen, selbst wenn y und v aus demselben freien Faktor stammen. Die Forderung $y \neq v$ schließt die in der Einleitung in 8.1.4 und 5 beschriebenen Probleme aus.

8.4.2 In den restlichen Fällen kommutieren die FRK's nicht und es werden benachbarte FRK's der Form $c_X(y) \circ c_Z(x)$ mit $Z \neq Y$ ausgeschlossen (vgl. 7.2).

8.4.3 In 8.2.2 stellt die Forderung $z \notin Y$ keine Einschränkung dar, da man benachbarte FRK's der Form $c_X(y)$ und $c_X(\tilde{y})$ zusammenfassen kann.

8.4.4 Es gibt Folgen von FRK's, die der Annahme 8.2 genügen (z.B. Folgen, in denen stets nach $c_X(y)$ eine FRK der Form $c_Z(x)$ oder $c_X(z)$ durchzuführen ist, wie in Kapitel 7). Die Annahme 8.3 ist unnatürlich und nur beweistechnisch bedingt.

Wie in Kapitel 7 soll gezeigt werden, daß Folgen von FRK's, die der Annahme 8.3 genügen, ein ursprünglich aus einer Silbe bestehendes Wort stets nicht-verkürzen. Hierzu ist es nützlich zu wissen, was zwischen zwei nichtbenachbarten "unschönen" FRK's (das sind FRK's der Form $c_X(y)$ und $c_Z(x)$) stehen muß.

8,5 LEMMA

Seien U, V, X, Y und Z irgendwelche der Gruppen G_i und u,v,x,y und z Elemente aus diesen Gruppen. In einer Folge von FRK's, die der Annahme 8.3 genügt, steht zwischen zwei nicht-benachbarten FRK's der Form $c_X(y) \circ \ldots \circ c_Z(x)$, mit $y \notin Z$, entweder ein weiteres Paar $c_X(v) \circ \ldots \circ c_U(x)$ (hier ist auch $v \in U$ zugelassen) oder mindestens eine FRK der Form $c_Y(u)$

und $c_V(z)$.

BEWEIS

Induktion nach der Anzahl k der FRK's, die zwischen $c_X(y)$ und $c_Z(x)$ stehen. Es muß $k \geq 1$ sein, weil für $y \notin Z$ die FRK's $c_X(y)$ und $c_Z(x)$ nach Annahme 8.3 nicht nebeneinander stehen dürfen.

k = 1:

$c_X(y) \circ c_1 \circ c_Z(x) = c_X(y) \circ c_U(v) \circ c_Z(x)$:

Da $c_X(y)$ und $c_Z(x)$ nicht benachbart sein dürfen, darf $c_U(v)$ mit keiner der beiden FRK's kommutieren.

(i) Damit $c_X(y)$ nicht mit $c_U(v)$ kommutiert, muß $c_U(v)$ von der Form: $c_X(v)$, $c_Y(v)$ oder $c_Y(\tilde{x})$ sein.

(ii) Damit $c_Z(x)$ nicht mit $c_U(v)$ kommutiert, muß $c_U(v)$ von der Form: $c_Z(v)$, $c_U(z)$ oder $c_X(z)$ sein.

Die unter (i) und (ii) angegebenen FRK's werden nun daraufhin untersucht, ob sie mit der jeweils anderen FRK kommutieren oder nicht. Ausscheiden muß $c_Y(\tilde{x})$, da es stets mit $c_Z(x)$ kommutiert. Ist $c_U(v) = c_X(v)$, so hat man mit $c_X(v) \circ c_Z(x)$ ein weiteres Paar der gleichen Form gefunden (hier muß wegen 8.3 gelten, daß v aus Z ist). Es vertauscht $c_Y(v)$ mit $c_Z(x)$, wenn v nicht aus Z ist, genau wie $c_U(z)$ mit $c_X(y)$, wenn $U \neq Y$. Man erhält also $c_U(v) = c_Y(z)$, welches die im Lemma geforderte Form hat. Es kommutiert $c_X(y)$ mit $c_Z(v)$, wenn v nicht aus X stammt, und v kann wegen 8.3 nicht in X liegen.

$k > 1$:

$c_X(y) \circ c_1 \circ \ldots \circ c_k \circ c_Z(x)$:

Läßt sich eine der FRK's c_i mit Hilfe der Kommutatorrelation nach links oder rechts aus der oben angegebenen Folge herausschieben, ist man nach Induktionsvoraussetzung fertig. Es sei also o.E. angenommen, daß c_1 nicht mit $c_X(y)$ und c_k nicht mit $c_Z(x)$ vertauscht. Die FRK's c_1 und c_k müssen dann die für $k = 1$ unter (i) und (ii) angegebene Form haben. Die verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten von c_1 und c_k werden nun untersucht:

(a) $c_1 = c_X(v)$

c_k beliebig aus (ii)

Dann hat man mit $c_X(v) \circ \ldots \circ c_Z(x)$ ein weiteres Paar der gleichen Form gefunden.

(b) $c_1 = c_Y(\tilde{x})$

c_k beliebig aus (ii)

Dann hat man mit $c_X(y) \circ c_Y(\tilde{x})$ ein weiteres Paar der gleichen Form gefunden, da auch $v \in U$ zugelassen ist.

(c) c_1 beliebig aus (i)

$c_k = c_X(z)$

Dann hat man mit $c_X(z) \circ c_Z(x)$ ein weiteres Paar der gleichen Form gefunden, da auch $v \in U$ zugelassen ist.

(d) $c_1 = c_Y(v)$

$c_k = c_U(z)$

Dies sind zwei Konjugationen der im Lemma geforderten Form.

(e) $c_1 = c_Y(v)$

$c_k = c_Z(w)$

Kann man $c_Z(w)$ an $c_Y(v)$ heranschieben, so muß $w \in Y$ oder $v \in Z$ gelten, damit ein Vertauschen mit $c_Y(v)$ unmöglich ist, denn $c_Z(w)$ kommutiert auf jeden Fall mit $c_X(y)$, weil w nicht aus X stammen kann (sonst hätte man $c_Z(w)$ und $c_Z(x)$ zusammengefaßt). Die Situation $w \in Y$ kann nur auftreten, wenn gleichzeitig $v \in Z$ ist, und dann hat man mit $c_Y(z)$ die gewünschte FRK gefunden. Läßt sich $c_Z(w)$ nicht nach links schieben, gibt es ein Hindernis der Form: $c_Z(r)$, $c_R(z)$ oder $c_W(z)$. In den letzten beiden Fällen ist man fertig, weil $c_Y(v)$ und $c_R(z)$ oder $c_W(z)$ die im Lemma geforderte Form haben. Für $c_Z(r)$ argumentiert man wie oben für $c_Z(w)$ und gelangt nach endlich vielen Schritten zu einer der anderen oben beschriebenen Situationen.

□

Um eine zu 7.3 analoge Aussage zu zeigen, wird die Folge der FRK's noch in einer bestimmten Weise angeordnet.

8.6 LEMMA

Folgen von FRK's, die der Annahme 8.3 genügen, lassen sich stets wie folgt anordnen:

8.6.1 Benachbarte FRK's der Form $c_X(y)$, $c_Y(x)$ stehen stets nebeneinander.

8.6.2 Läßt sich $c_X(\tilde{y})$ nach rechts an $c_Z(y)$ heranschieben, so ist dies geschehen.

8.6.3 Es stehen keine Sequenzen $c_{X_1}(y_1) \circ \ldots \circ c_{X_{n-1}}(y_{n-1})$ vor $c_Y(x_{n-1})$ für $y_i \in Y$ und $x_{n-1} \in X_{n-1}$, wenn man Globalkonjugationen und Automorphismen in den einzelnen Faktoren von π_1 vernachlässigt.

BEWEIS

Zunächst werden alle benachbarten FRK's der Form $c_X(y)$, $c_Y(x)$ zusammengeschoben, wobei man diese Ordnung von rechts beginnend vornehmen kann, d.h. man beginnt mit der am weitesten rechts gelegenen FRK $c_Y(x)$ zu der es links davon eine benachbarte FRK der Form $c_X(y)$ gibt. Dann kann man $c_X(y)$ nach rechts an $c_Y(x)$ heranschieben (d.h. $c_Y(x)$ muß nicht bewegt werden), denn $c_X(y)$ kommutiert nicht mit FRK's der Form $c_X(z)$, $c_Y(z)$ oder $c_Z(\tilde{x})$, mit den ersten beiden vertauscht $c_Y(x)$ auch nicht und die letzte kann wegen 8.3 nicht das einzige Hindernis für ein Verschieben von $c_X(y)$ nach rechts darstellen, es sei denn Z = Y und dann hätte man bereits zusammengefaßt, falls das möglich wäre (vgl. Bem. 8.4.3). Stehen alle benachbarten Konjugationen der Form $c_X(y)$ und $c_Y(x)$ nebeneinander, beginnt man wieder von rechts beginnend wie folgt zu ordnen: An $c_Z(y)$ werden von links kommend alle FRK's der Form $c_X(\tilde{y})$ herangeschoben, falls das möglich ist. Hierbei ist sicherzustellen, daß die zuerst zusammengeschobenen FRK's der Form $c_X(y) \circ c_Y(x)$ nicht wieder auseinandergerissen werden. Dies vermeidet man, indem man, falls $c_X(\tilde{y})$ verschoben werden soll, ein zugehöriges $c_Y(x)$ (bzw. $c_X(\tilde{\tilde{y}})$ usw.) "mitnimmt". Das ist möglich, weil die beiden FRK's im wesentlichen mit den gleichen FRK's kommutieren bzw. nicht kommutieren (s.o.). Der einzige Fall - $c_X(\tilde{y})$ vertauscht mit $c_Z(\tilde{y})$ und $c_Y(x)$ nicht - kann wegen 8.3 nicht auftreten.

Zum Beweis von 8.6.3 gehen wir von einer Folge aus, die bereits gemäß 8.6.1-2 geordnet ist. Eine Sequenz $c_{X_1}(y_1) \circ \ldots \circ c_{X_{n-1}}(y_{n-1}) \circ c_Y(x_{n-1})$ ändern wir wie folgt ab (vgl. 6.3.1 und 6.5):

$$\hat{=} \; c_{X_1}(y_1 y_{n-1}^{-1}) \circ \ldots \circ c_{X_{n-2}}(y_{n-2} y_{n-1}^{-1}) \circ k(y_{n-1}) \circ c_Y(x_{n-1})$$

Die Konjugationsfaktoren können nicht zu 1 werden wegen Annahme 8.3.1.

Ein Automorphismus von Y wird nach rechts und die Globalkonjugation nach links herausgeschoben. Dabei ändert sich der Typ der einzelnen FRK's nicht (vgl.7.2) und die neue Folge hat bis auf Globalkonjugation die gleiche Wirkung auf das Sphärensystem. Es bleibt zu prüfen, ob die neue Folge immer noch Annahme 8.3 erfüllt, d.h. ob unschöne FRK's nun benachbart sein können. Die FRK $c_{X_{n-1}}(y_{n-1}) := c_X(y)$ stellt ein Verschiebehindernis dar für FRK's der Form $c_X(w)$, $c_W(\tilde{x})$ und $c_Y(w)$. Eine FRK $c_Y(w)$ kann wegen Annahme 8.3 nicht links von der betrachteten Sequenz stehen und sich an diese heranschieben lassen. FRK's der Form $c_X(w)$ und $c_W(\tilde{x})$ links von $c_X(y)$ haben bereits ein Hindernis in der Sequenz, da auch die Gruppe W ($\neq$ Y wegen Ordnung 8.6.1-2) eine der Gruppen X_i, $i < n-1$, sein muß.

Da $c_X(w)$ und $c_Y(w)$ nicht mit $c_Y(x)$ kommutieren, kann von rechts nur die FRK $c_W(\tilde{x})$ an $c_X(y)$ herangeschoben werden, was für $W \neq Y$ verboten (8.3) und für $W = Y$ wegen Ordnung 8.6.1-2 unmöglich ist.

□

8.7 LEMMA

Erfüllt eine Folge von FRK's die Annahme 8.3 und ist gemäß 8.6 angeordnet, so gilt:

Wendet man diese Folge auf ein ursprünglich aus einer Silbe bestehendes Wort an, so verringert sich seine Silbenlänge bei jeder einzelnen FRK nicht.

Insbesondere gilt, daß nach der Durchführung von $c_X(y)$ als letzter FRK in dem neu entstandenen Wort jede Silbe aus X von Silben aus Y umgeben ist.

BEWEIS

Wir zeigen den zweiten Teil der Aussage durch vollständige Induktion nach der Anzahl k der FRK's, in der Folge, woraus dann unmittelbar die erste Aussage folgt.

k = 1:

Es sei $x \in X$ die Silbe, aus der das Wort ursprünglich besteht, dann können alle FRK's vor der ersten FRK der Form $c_X(y)$ weggelassen werden, ferner all die FRK's, die sich mit Hilfe der Kommutatorrelation nach rechts an dieser FRK vorbeischieben lassen. Von nun an betrachten wir Folgen von FRK's, an denen diese Veränderungen bereits vorgenommen wurden und die wieder gemäß 8.6 angeordnet sind (dies ist möglich, da durch das Verschieben die in 8.3 geforderte Konstellation nicht zerstört werden kann, vgl. 8.2).

Nach der Ausführung von $c_X(y)$ erhält man das Wort $y^{-1}xy$, welches den Forderungen des Lemmas genügt.

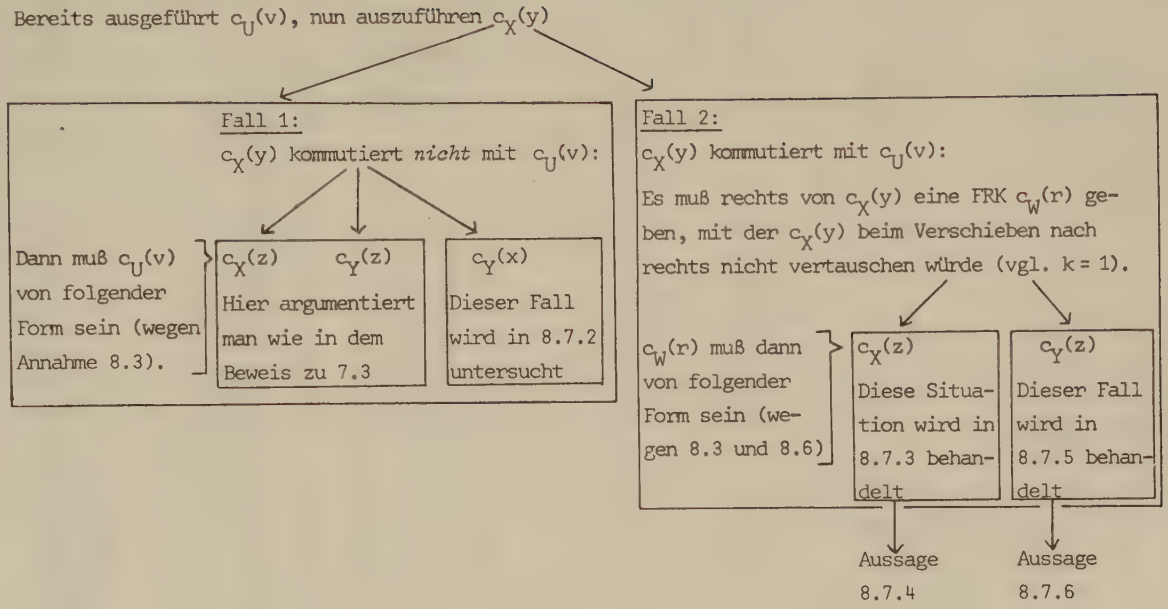
k > 1:

Es sei die FRK $c_X(y)$ auszuführen und die letzte bereits ausgeführte FRK sei von der Form $c_U(v)$. Dann sind die beiden Fälle, daß $c_X(y)$ mit $c_U(v)$ nicht vertauscht oder vertauscht gesondert zu betrachten. Die durchgeführten Fallunterscheidungen sind in Tabelle 8.7.1 zusammengefaßt.

8.7.1 Tabelle zum Beweis von 8.7:

Induktionsschritt $k \to k+1$:

Bereits ausgeführt $c_U(v)$, nun auszuführen $c_X(y)$



Fall 1:

Wenn $c_X(y)$ nicht mit $c_U(v)$ kommutiert, muß $c_U(v)$ von der Form $c_X(z)$, $c_Y(z)$ mit $z \in X*Y$ oder $c_Y(x)$ sein. Die Fälle $c_X(z)$ behandelt man wie in 7.3, es bleibt der Fall $c_Y(x)$ zu betrachten (im Fall $n = 3$ war diese Situation wegen $c_X(y) \circ c_Y(x) \hat{=} k(y) \circ c_Z(y^{-1}) \circ c_Y(x)$ nicht möglich):

8.7.2 $c_X(y) \circ c_Y(x)$:

Nach Voraussetzung sind alle Silben aus Y von Silben aus X umgeben. Ein Teilwort der Form: $\ldots z(x_1y_1x_2 \ldots x_\ell y_\ell x_{\ell+1})w \ldots$ mit $z, w \in X*Y$ geht über in:

$$\ldots z(y^{-1}x_1yy_1y^{-1}x_2 \ldots x_\ell yy_\ell y^{-1}x_{\ell+1}y)w \ldots = \ldots z(y^{-1}x_1\tilde{y}_1x_2 \ldots x_\ell\tilde{y}_\ell x_{\ell+1}y)w \ldots$$

welches der Forderung genügt, daß jede Silbe aus X von Silben aus Y umgeben ist, da wegen $\tilde{y}_i \neq 1$ keine Kürzungen möglich sind. Am Anfang einer solchen Sequenz aus $X * Y$ steht stets y^{-1} und am Ende stets y.

Fall 2:

Damit sich $c_X(y)$ nicht ganz nach rechts aus der Folge der FRK's herausschieben läßt (vgl. $k = 1$), muß es in der bereits ausgeführten Folge eine FRK geben, mit der $c_X(y)$ nicht kommutiert. Die am nächsten an $c_X(y)$ gelegene FRK dieser Art werde mit $c_W(r)$ bezeichnet. Wegen Annahme 8.3 kann $c_W(r)$ nur von der Form $c_X(z)$, $c_Y(z)$ oder $c_Y(x)$ mit $z \in X*Y$ sein (wegen Anordnung 8.6 wird die letzte FRK nur im Fall 1 behandelt). Die beiden verbliebenen FRK's werden getrennt untersucht.

8.7.3 $c_W(r) = c_X(z)$:

Nach der Durchführung von $c_X(z)$ entsteht nach Voraussetzung ein Wort, in

dem alle Silben aus X von Silben aus Z umgeben sind. Es bleibt zu überprüfen, was mit diesen Silben aus Z bis zur Durchführung von $c_X(y)$ geschieht, da weder X nochmals konjugiert wird (nach Annahme war $c_X(z)$ die erste FRK dieser Art rechts von $c_X(y)$) noch neue Silben aus X hinzukommen (nach Annahme 8.3 dürfen FRK's der Form $c_X(y)$ und $c_T(x)$ nicht benachbart sein, falls $T \neq Y$ und $c_X(y) \circ c_Y(x)$ müssen nach 8.6 nebeneinander stehen).

Sei $c_Z(s)$ von rechts gesehen die erste FRK nach $c_X(z)$ in der Z konjugiert wird. Da s nach dem oben gesagten nicht aus X stammen kann, dürfen $c_Z(s)$ und $c_X(z)$ nicht benachbart sein. Nach 8.5 muß zwischen ihnen also ein weiteres Paar der gleichen Art oder mindestens eine FRK der Form $c_S(t)$ und $c_P(x)$ stehen.

Da nach 8.6 $P \neq Y$ sein muß, ist $c_P(x)$ ausgeschlossen, denkbar ist nur noch: $c_Z(s) \circ .. \circ c_Z(q) \circ .. \circ c_X(z)$, was nach Wahl von $c_Z(s)$ unmöglich ist, oder $c_Z(s) \circ .. \circ c_Q(z') \circ .. \circ c_X(z)$. Die FRK $c_Q(z')$ stellt aber für $c_X(z)$ kein Hindernis dar und einer der oben betrachteten Fälle müßte vorliegen. Daher kann Z zwischen $c_X(z)$ und $c_X(y)$ nicht mehr konjugiert werden. Dieses Ergebnis halten wir für den Beweis von 8.10 fest.

8.7.4

Ist die erste FRK rechts von $c_X(y)$, mit der $c_X(y)$ nicht kommutieren würde, von der Form $c_X(z)$, so steht zwischen $c_X(y)$ und $c_X(z)$ keine FRK der Form $c_Z(s)$ mehr.

Da alle Silben aus X also immer noch von Silben aus Z umgeben sind, wenn $c_X(y)$ ausgeführt wird, sind keine Kürzungen möglich und das neu entstehende Wort hat die gewünschte Form.

8.7.5 $c_W(r) = c_Y(z)$ $(z \notin X)$:

Nach $c_Y(z)$ sind alle Silben aus Y von Silben aus Z umgeben, und Y wird nach Voraussetzung bis zur Ausführung von $c_X(y)$ nicht mehr konjugiert.

(i) Kommt eine FRK der Form $c_Z(\tilde{y})$ vor, so hat man folgende Situation: $c_X(y) \circ .. \circ c_S(\tilde{\tilde{y}}) \circ .. \circ c_Z(\tilde{y}) \circ c_Y(z)$, d.h. man befindet sich in einer Sequenz von Konjugationen mit Silben aus Y und diese sind nach 8.3.1 alle verschieden.

$w(Y,Z) \xrightarrow[c_Z(\tilde{y})]{} \tilde{y}^{-1} w(Y,Z) \tilde{y}$, wenn w(Z,Y) ein in Z beginnendes und endendes Wort aus $Y * Z$ war. Nach der Durchführung von $c_Z(\tilde{y})$ sind alle Wörter aus $Y * Z$ von Silben aus Y umgeben, genauer steht zwischen einem Wort aus $Y * Z$ und Silben aus anderen Faktoren stets eine Silbe $\tilde{y}$ oder $\tilde{y}^{-1}$. Selbst wenn eine Silbe aus S auf $\tilde{y}$ oder $\tilde{y}^{-1}$ trifft, ist eine vollständige Kürzung der Silbe aus Y bei der Durchführung von $c_S(\tilde{\tilde{y}})$ nicht möglich, da die Silben $\tilde{y}$ und $\tilde{\tilde{y}}$ verschieden waren. Treffen Silben aus S und aus X aufeinander, argumentiert man analog.

(ii) Kommt die FRK $c_Z(\tilde{y})$ nicht vor, so hat man im allgemeinen folgende Situation:

$$[c_X(y) \circ \ \ldots \ \circ c_S(\tilde{\tilde{y}})] \circ \ \ldots \ \circ c_Y(z)$$

Kommt zwischen [...] und $c_Y(z)$ noch eine FRK der Form $c_Z(t)$ vor, so betrachten wir von $c_Y(z)$ aus gesehen die erste:

$$c_Z(t) \circ \ \ldots \ \circ c_Y(z).$$

Da der Fall $t \in Y$ schon in (i) behandelt wurde, können wir nun $t \notin Y$ annehmen und die beiden FRK's dürfen wegen 8.3 nicht benachbart sein.

Nach Lemma 8.5 muß zwischen $c_Z(t)$ und $c_Y(z)$ ein weiteres Paar der

gleichen Art oder mindestens eine FRK der Form $c_Q(\hat{y})$ und $c_T(p)$ stehen.

An $c_Q(\hat{y})$ hätte nach 8.6 $c_X(y)$ herangeschoben werden müssen. Da $c_S(\check{z})$ mit $c_Y(z)$ kommutiert, bleibt noch die Situation: $c_Z(t)\circ..\circ c_Z(s)\circ..\circ c_Y(z)$, welche nach Wahl von $c_Z(t)$ unmöglich ist. Damit sind wir auch im Fall (ii) fertig, und halten fest:

8.7.6

Ist die erste FRK rechts von $c_X(y)$, mit der $c_X(y)$ nicht kommutieren würde, von der Form $c_Y(z)$, so gibt es zwischen $c_X(y)$ und $c_Y(z)$ keine FRK der Form $c_Z(s)$ mit $s \in Y$. Durch FRK's neu hinzukommende Silben aus Y sind alle ungleich y^{-1} am Anfang der zu konjugierenden Silbe und ungleich y am Ende einer solchen Silbe, wenn diese an Silben aus X angrenzt.

Der letzte Teil von 8.7.6 ergibt sich aus Annahme 8.3.1, in der gefordert wird, daß in einer Sequenz von FRK's, in der mit Silben aus Y konjugiert wird, alle Konjugationsfaktoren verschieden sind. Es bleibt zu bemerken, daß in den Fällen (i) und (ii) nach der Ausführung von $c_X(y)$ alle Silben aus X von Silben aus Y umgeben sind. Dies beendet den Beweis von 8.7.

□

Da wieder die Verlängerung eines Wortes nur von eventuellen Kürzungsmöglichkeiten abhängt, erhält man ein zu 7.4 analoges Korollar.

8.8 KOROLLAR

8.8.1 Sei w ein beliebiges Wort in $G_1 * \ldots * G_n$ und y ein Element aus einem Faktor von π_1, welches sich nicht aus den in w vorkommenden

Buchstaben oder deren Inversen zusammensetzen läßt, dann ist die Silbenlänge von $c_X(y)(w)$ größer oder gleich der von w.

8.8.2 Sind in einem Wort w alle Silben aus X von Silben, die nicht aus Y stammen umgeben (Silben aus X können auch am Anfang oder Ende von w stehen), so führt die Anwendung von $c_X(y)$ zu einer Nichtverkürzung der Silbenlänge von w und in dem neu entstehenden Wort sind alle Silben aus X von Silben aus Y umgeben.

□

8.9 SATZ

Geht man von einer Folge von FRK's aus, die der Annahme 8.3 genügt und die gemäß 8.6 geordnet ist, so führt jede einzelne der FRK's aus dieser Folge zu einer Vergrößerung der vollständig reduzierten Länge eines aus BP . (1,0,...,0) entstandenen Baumes.

BEWEIS

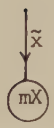
Wir zeigen durch vollständige Induktion nach der Anzahl k der FRK's in der Folge die folgende Behauptung:

8.10 BEHAUPTUNG

Ein vollständig reduzierter Baum, der durch eine Folge von FRK's, die 8.3 erfüllt und gemäß 8.6 geordnet ist, aus BP . (1,0,...,0) entstanden ist, hat nach Durchführung von $c_X(y)$ als letzter FRK in der Folge die folgenden Eigenschaften:

8.10.1 Alle Silben aus X sind von Silben aus Y umgeben, bis auf die in 8.10.2 bezeichnete Stelle.

8.10.2 Alle Extremitäten mit dem Gewicht mX ($0 \neq m \in \mathbb{Z}$) sind von der Form:

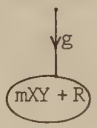


oder

, $\tilde{x} \in X$, $\tilde{y} \in Y$.

(Der erste Fall ist der einzige, bei dem eine Silbe aus X am Ende eines Astes stehen kann.)

8.10.3 Alle Extremitäten, die mit einer Silbe g, die nicht aus X oder Y stammt, enden, sind von der Form:



wobei $R = \Sigma\, m_i G_i$ für $G_i \neq X, Y$ und $m, m_i \in \mathbb{Z}$ (d.h. die Einträge in den Gewichten sind an den X und Y entsprechenden Stellen gleich).

8.10.4 Es gibt mindestens eine Extremität der Form

oder

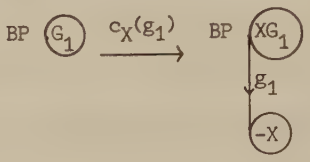
$y' \in Y$.

BEWEIS VON BEHAUPTUNG 8.10

8.10.5 k = 1:

Man muß wie beim Beweis zu Behauptung 7.6 stets mit einer FRK der Form $c_X(g_1)$ beginnen. Alle FRK's, die nicht diese Form haben und rechts von $c_X(g_1)$ stehen, werden weggelassen, ebenso wie die FRK's, die sich mit Hilfe der Kommutatorrelation 2.6.1 an $c_X(g_1)$ nach rechts vorbeischieben lassen und nicht von der Form $c_Y(g_1')$ sind. Danach erfüllt die verkürzte

Folge wieder 8.3 und läßt sich nach 8.6 ordnen (vgl. 8.7, k = 1).



Der neue Baum erfüllt 8.10.

k > 1

Die als nächste auszuführende FRK möge von der Form $c_X(y)$ sein. Wie im Beweis zu 7.6 untersuchen wir folgende Teilstücke des Baumes getrennt:

(i) Äste

(ii) Verzweigungspunkte

(iii) Basispunkt

(iv) Extremitäten.

Hierbei werden, falls notwendig, für die bereits ausgeführten FRK's die Fälle aus Lemma 8.7 unterschieden. Die Fallunterscheidungen sind in Tabelle 8.10.6 zusammengefaßt.

8.10.6 Tabelle zum Beweis von 8.10:

Induktionsschritt $k \to k+1$:

Bereits ausgeführt ist $c_U(v) \circ \ldots \circ c_W(r) \circ \ldots$, auszuführen ist $c_X(y)$.
(Es werden wie im Beweis zu 8.7 fünf Fälle unterschieden, vgl. Tabelle 8.7.1)

Bereits ausgeführte FRK $c_U(v)$ oder $c_W(r)$	Fall 1: $c_U(v) = \ldots$			Fall 2: $c_W(r) = \ldots$	
	$c_X(z)$	$c_Y(z)$	$c_Y(x)$	$c_X(z)$	$c_Y(z)$
(i) Äste	8.10.7	8.10.7	8.10.7	8.10.7	8.10.7
(ii) Verzweigungen	8.10.8	8.10.9	8.10.10	8.10.11	8.10.12
(iii) Basispunkt	8.10.13	8.10.13	8.10.13 und Zusatzüberlegung 8.10.14	8.10.13 und Zusatzüberlegung 8.10.14	8.10.13 und Zusatzüberlegung 8.10.14
(iv) Extremitäten (1) enden mit einer Kante nicht aus Y	8.10.15	8.10.15	8.10.15	8.10.15	8.10.15
(2) enden mit einer Kante aus Y	folgt aus 8.10.16	folgt aus 8.10.17	8.10.18	8.10.18	8.10.17

(i) Äste:

8.10.7

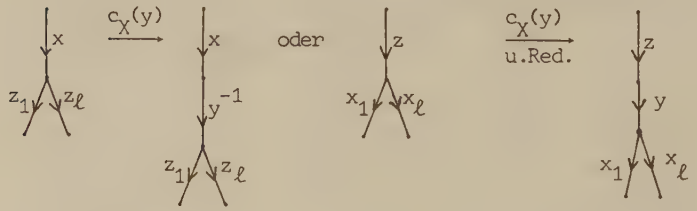
Hier ist in 8.7 bereits alles gezeigt (vgl. auch 8.8.2). Die Extremitäten werden weiter unten noch behandelt.

(ii) Verzweigungen:

Wir betrachten zunächst den Fall, daß $c_X(y)$ vor einer FRK $c_U(v)$ steht, mit der sie nicht kommutiert.

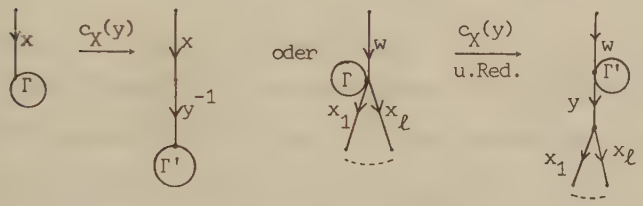
8.10.8 $c_U(v) = c_X(z)$

Interessant sind nur die Verzweigungspunkte, an denen Kanten aus X anstoßen. Wegen der Induktionsvoraussetzung 8.10.1 dürfen an so einem Verzweigungspunkt nur Kanten aus Z anstoßen, womit man die gleiche Situation wie in 7.6.6 hat:



8.10.9 $c_U(v) = c_Y(z)$:

Wir betrachten nur Verzweigungspunkte, an die Kanten aus X anstoßen: (Nach Induktionsvoraussetzung sind alle Silben aus Y von Silben aus Z umgeben, daher können an einem Verzweigungspunkt Silben aus Y und aus X nicht aufeinandertreffen.)

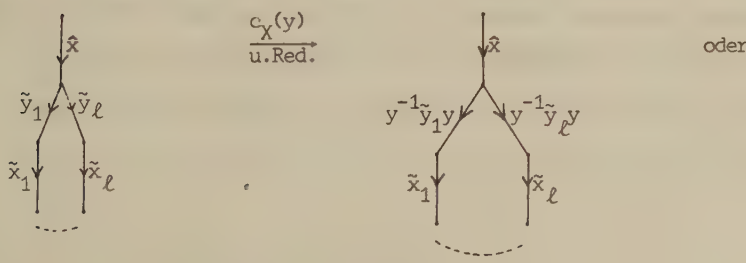


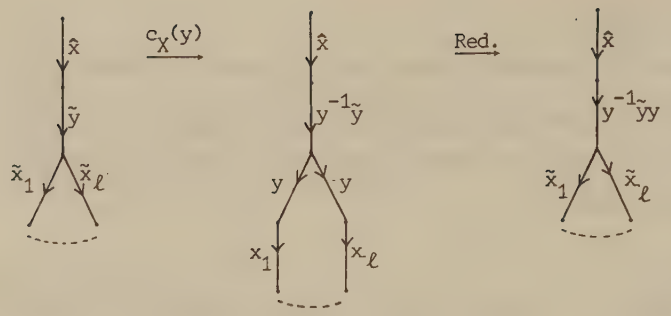
Hierbei sind Γ und Γ' = $c_X(y)(\Gamma)$ Teilbäume, die nicht mit Kanten aus X oder Y beginnen.

8.10.10 $c_U(v) = c_Y(x)$:

(Dieser Fall tritt in Kapitel 7 nicht auf.)

Nun müssen nach Induktionsvoraussetzung alle Silben aus Y von Silben aus X umgeben sein. Für Verzweigungspunkte an die nur Silben aus X, nicht aber Silben aus Y anstoßen, argumentiert man wie oben. Beginnt oder endet an einem Verzweigungspunkt eine Kante aus Y, so stoßen sonst nur noch Kanten aus X an.



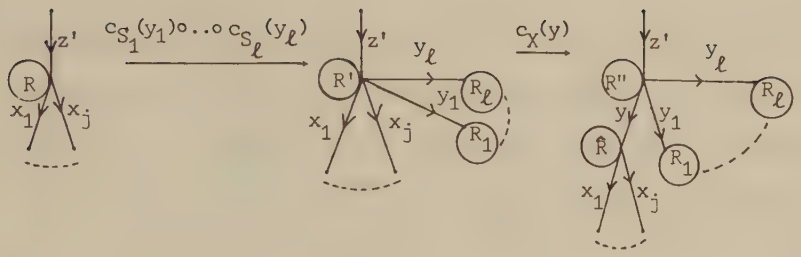


Da die Konjugation mit y einen Automorphismus von Y definiert, kann $y^{-1}\tilde{y}y$ nicht trivial sein und die $y^{-1}\tilde{y}_i y$ sind alle verschieden und $\neq 1$.

Nun möge $c_X(y)$ mit $c_U(v)$ kommutieren und das erste Hindernis für ein Verschieben von $c_X(y)$ nach rechts heiße $c_W(r)$. Wir können auf Grund der für k = 1 angestellten Überlegungen annehmen, daß es ein solches gibt oder daß $y \in G_1$ und $c_X(y)$ zu der Sequenz am Anfang der Folge gehört. Der letztere Fall wird bei den Betrachtungen für den Basispunkt (vgl. 8.10.13). mitbehandelt.

8.10.11 $c_W(r) = c_X(z)$ $(z \notin Y)$:

Wegen 8.7.4 kommen zwischen $c_X(y)$ und $c_X(z)$ keine FRK's der Form $c_Z(s)$ mehr vor. Der Faktor X wird nach Definition von $c_W(r)$ nicht mehr konjugiert und es werden auch keine neuen Silben aus X produziert, da wegen 8.3 und 8.6 keine FRK der Form $c_S(x)$ zwischen $c_X(y)$ und $c_X(z)$ stehen kann. Silben aus X und aus Y können durch Stachelausfahren (eine FRK der Form $c_S(y')$ zwischen $c_X(y)$ und $c_X(z)$ in einer Sequenz mit $c_X(y)$, $y \neq y'$) zusammentreffen:



Hier ist R ein beliebiges Gewicht und die $R_1,\ldots,R_\ell$ werden durch $c_{S_i}(y_i)$ ausgefahren. Es ist auch $R_i = 0$ möglich, wenn an dieser Stelle kein Stachel ausgefahren wird. R' und R'' sind die entsprechend übriggebliebenen Gewichte, und $\hat{R}$ entsteht eventuell bei $c_X(y)$ (vgl. iv); $y_i \neq y$ wegen 8.3.1.

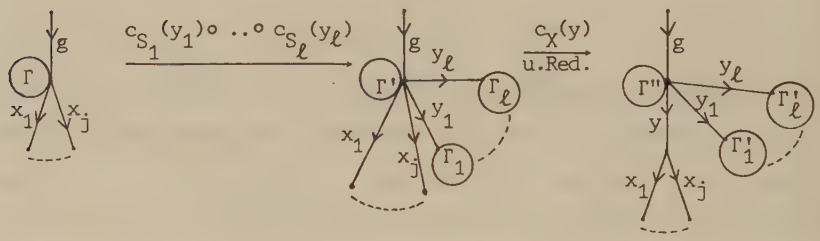
Die umgekehrte Situation (eine Silbe aus X wird von Silben aus Z gefolgt) behandelt man analog. In den übrigen Fällen argumentiert man wie in 8.10.8).

8.10.12 $c_W(r) = c_Y(z)$ $(z \in X)$:

Wegen 8.7.6 kommen zwischen $c_X(y)$ und $c_Y(z)$ keine FRK's der Form $c_Z(s)$ mit $s \in Y$ mehr vor und eine FRK der Form $c_Y(s)$ erscheint nach Voraussetzung nicht, da $c_Y(z)$ die erste FRK dieser Art war. Daher sind alle Silben aus Y, die vor der Durchführung von $c_Y(z)$ bereits vorhanden waren, auch noch von Silben aus Z umgeben, wenn $c_X(y)$ durchgeführt werden soll. Diese Silben können nicht an Verzweigungspunkten mit Silben aus X zusammentreffen. Zwischen $c_X(y)$ und $c_Y(z)$ können aber noch FRK's der Form $c_S(y')$ mit $y' \neq y$ stehen, welche sowohl durch Konjugation (eine Silbe aus S trifft auf eine Silbe aus X) als auch durch Stachelausfahren (s.o.) zu einer Situation führen können, in der Silben aus X auf Silben aus Y treffen.

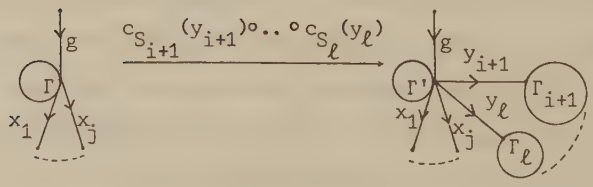
Im ersten Fall folgt die Behauptung aus dem zweiten Teil von 8.7.6, während man für auszufahrende Stachel wie in 8.10.11 argumentiert. Hierbei sind folgende Sonderfälle zu beachten (die in 8.10.11 nicht vorkommen können). Einmal kann das Gewicht R durch einen ganzen nicht in X oder Y beginnenden Teilbaum ersetzt werden und außer z' können noch andere Silben nicht aus Y vor x_i stehen:

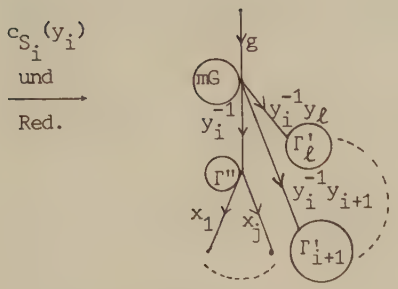
$g \notin S_i$ $(i = 1,\ldots,\ell)$:

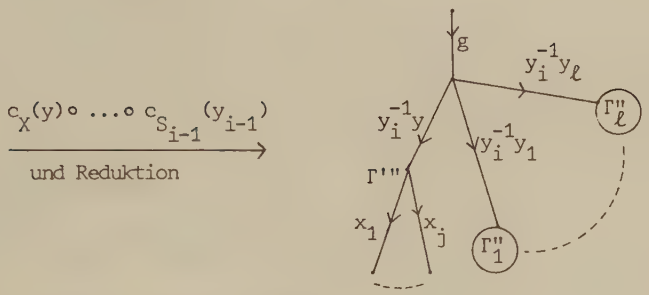


Hier sind Γ und Γ_i $(i = 1,\ldots,\ell)$ Teilbäume, die nicht in X oder Y beginnen. Sonst verläuft die Argumentation wie in 8.9.9.

$g \in S_i$:







Auch hier ist wegen Annahme 8.3 keine Verkürzung durch Reduktion möglich.

Der Fall, daß $c_X(y)$ erst durch Verschieben auf eine FRK der Form $c_Y(x)$ trifft, ist wegen der Ordnung 8.6 nicht möglich, was die Behandlung der Verzweigungspunkte an dieser Stelle beendet.

(iii) Der Basispunkt:

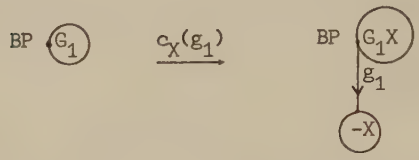
Hier müssen Verkürzungen durch vollständige Reduktion nach der Durchführung von $c_X(y)$ ausgeschlossen werden. Dazu beweisen wir in Analogie zu 7.6 folgende Behauptung:

8.10.13:

Das Gewicht am Basispunkt kann nur dann wegfallen, wenn sich am Basispunkt

eine Verzweigung mit Silben aus mindestens zwei verschiedenen Faktoren gebildet hat.

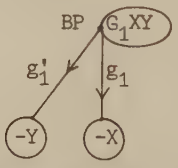
BEWEIS



Im Anschluß an $c_X(g_1)$ können folgende FRK's ausgeführt werden: $c_X(y)$, $c_Y(x)$, $c_Y(g_1')$, $c_{G_1}(x)$ (alle anderen FRK's könnte man nach rechts herausschieben und weglassen, vgl. k = 1).

Bei der Ausführung der ersten beiden FRK's bildet sich am Basispunkt eine Verzweigung (es sei $Y \neq G_1$ vorausgesetzt) mit Silben aus zwei verschiedenen Faktoren und man ist fertig.

Bei der dritten FRK bildet sich zwar auch eine Verzweigung, jedoch beginnen nur Kanten aus G_1 am Basispunkt (bei gleichzeitigem Wegfall des Gewichts würde also eine vollständige Reduktion nötig).



Es bleibt sicherzustellen, daß das Gewicht am Basispunkt im Verlauf der Sequenz zu Beginn der Folge von FRK's nicht wegfallen kann. Dazu betrachten wir folgende Sequenz: $c_{Y_1}(g_{1_1}) \circ \ldots \circ c_{Y_\ell}(g_{1_\ell}) \circ c_X(g_1)$. Das Gewicht am Basispunkt fällt höchstens dann weg, wenn $\ell = n-2$ ist, also alle

Gruppen bis auf G_1 konjugiert werden. Dann führt man folgende Umformung durch:

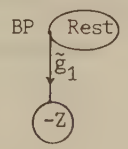
$$c_{Y_1}(g_{1_1}) \circ \ldots \circ c_{Y_\ell}(g_{1_\ell}) \circ c_X(g_1) \hat{=} c_{Y_1}(g_{1_1}) \circ \ldots \circ c_{Y_\ell}(g_{1_\ell}) \circ k(g_1) \circ c_{-X}(g_1^{-1})$$

$$\hat{=} k(g_1) \circ c_{Y_1}(g_{1_1} g_1^{-1}) \circ \ldots \circ c_{Y}(g_{1_\ell} g_1^{-1}) \quad \text{(vgl. 8.6.3)}$$

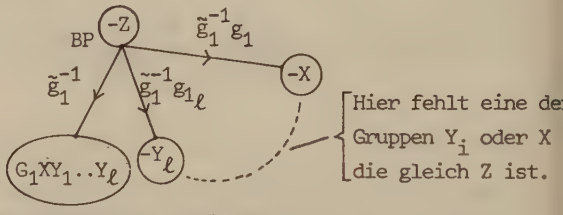
Die Globalkonjugation $k(g_1)$ wird nach links herausgeschoben und man erhält eine Folge mit derselben Wirkung (vgl. 6.4-5). Da man nur die FRK $c_X(g_1)$ "weggelassen" und den Typ der übrigen FRK's nicht verändert hat, erfüllt auch die neue Folge Annahme 8.3 und ist gemäß 8.6 geordnet ($c_X(g_1)$ kann kein Verschiebehindernis wie in 8.5 gewesen sein, da sie am Anfang der Folge stand).

Bei Anwendung der neuen Sequenz kann das Gewicht am Basispunkt nicht wegfallen und im Anschluß an diese Sequenz und alle Sequenzen dieser Art mit $n-2 > \ell > 0$ können nur noch FRK's der Form $c_X(z)$ bzw. $c_{Y_i}(z)$ oder $c_Z(x)$ bzw. $c_Z(y_i)$ (s.o., eine FRK $c_{G_i}(x)$ kann nur unmittelbar hinter $c_X(g_i)$ stehen).

Gehört Z nicht zu den bereits am Basispunkt aufgeführten Gruppen, so ist man fertig, denn man erhält eine Verzweigung von Silben aus G_1 und einer weiteren Silbe die nicht aus G_1 stammt. Gehört Z zu den bereits in dem Gewicht am Basispunkt vorkommenden Gruppen, so gibt es eine Extremität der Form:

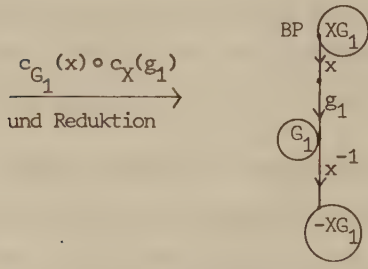


Man fügt nun die Identität $k(\tilde{g}_1)k(\tilde{g}_1^{-1})$ vor der auszuführenden FRK ein und schiebt die Globalkonjugation $k(\tilde{g}_1)$ mit Relation 6.2.4. ganz nach links. An der Folge der FRK's hat sich so nichts geändert, aber der Baum auf den man die nächste FRK anwenden muß, hat die Form:



Die Anwendung einer der oben angegebenen FRK's führt nun zu einer Verzweigung mit den gewünschten Eigenschaften und der Baum hat die in 8.10 geforderte Struktur.

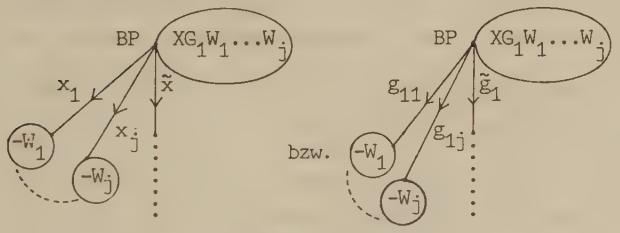
Ist $\ell = 0$, d.h. steht am Anfang der Folge nur eine FRK der Form $c_X(g_1)$, so kann diese FRK neben den oben bereits behandelten FRK's noch von der FRK $c_{G_1}(x)$ gefolgt werden:



Es kann sogar eine ganze Teilfolge zu Beginn der Folge geben in dem FRK's der Form $c_X(\tilde{g}_1)$ und $c_{G_1}(\tilde{x})$ aufeinander folgen. Der so erzeugte Baum hat stets das Gewicht XG_1 am Basispunkt und beginnt am Basispunkt mit einer Kante aus X oder G_1, je nachdem, ob die letzte FRK von der Form $c_{G_1}(\tilde{x})$ oder $c_X(\tilde{g}_1)$ war.

Der auf diese Art entstehende Baum wird bei jedem Schritt länger und erfüllt 8.10. Die erste andere FRK, die nicht mit der letzten FRK der Teilfolge kommutiert, muß von der Form $c_{G_1}(y)$ oder $c_Y(g_1'')$ bzw. $c_X(y)$ oder $c_Y(x'')$ sein, wenn die zuletzt durchgeführte FRK von der Form $c_{G_1}(\tilde{x})$ bzw. $c_X(\tilde{g}_1)$ war, was jedesmal die gewünschte Verzweigung liefert.

Weiter gibt es FRK's, die zwar mit $c_{G_1}(\tilde{x})$ bzw. $c_X(\tilde{g}_1)$ kommutieren, jedoch nicht mit der jeweils anderen FRK, nämlich $c_{W_1}(x_1)\circ\ldots\circ c_{W_j}(x_j)$ bzw. $c_{W_1}(g_{11})\circ\ldots\circ c_{W_j}(g_{1j})$, die x_i bzw. g_{1j} sind paarweise verschieden und ungleich $\tilde{x}$ bzw. $\tilde{g}_1$.

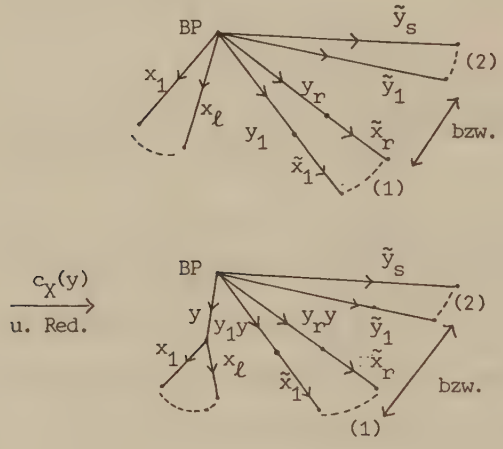


Wegen 8.6.3 kann bei der Durchführung dieser FRK's das Gewicht am Basispunkt nicht zu Null werden und die erste nun folgende FRK darf nicht von der Form $c_X(w)$ oder $c_W(\bar{x})$ bzw. $c_{G_1}(w)$ oder $c_W(\bar{g}_1)$ sein. Eine FRK, die sich nicht aus der übrigen Folge herausschieben läßt, muß dann von der Form $c_S(r)$ oder $c_R(s)$ für ein am Basispunkt bereits vorhandenes Gewicht S sein. Stehen S und R beide am Basispunkt, so erreicht man durch Prozeß 4.14.2 und das Herausschieben einer Globalkonjugation nach links, daß -S oder -R an den Basispunkt gelangt ($S = X$ und $R = G_1$ ist unmöglich), und man erhält die gewünschte Verzweigung, weil der Konjugationsfaktor nicht aus X bzw. G_1 stammt. Der neue Baum erfüllt wieder 8.10.

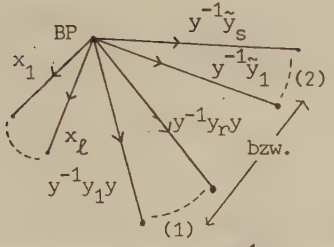
8.10.14:

Es bleibt nun noch zu prüfen, ob eine einmal vorhandene Verzweigung am Basispunkt mit Kanten aus verschiedenen Faktoren wieder wegfallen kann. Dieses Problem ist schon bei der Betrachtung der Verzweigungspunkte behandelt, wenn man jeweils die zum Verzweigungspunkt führende Kante wegläßt.

Vor der Durchführung von $c_X(y)$ hat man nach 8.10.10 ($c_U(v) = c_Y(x)$) bzw. 8.10.11 und 8.10.12 ($c_X(y)$ kommutiert mit $c_U(v)$) folgende Situationen (1) bzw. (2) (es handelt sich um die Fälle, an denen Silben aus X und aus Y zusammentreffen können, auf den Basispunkt übertragen):



Hier kann eventuell eines der $y_iy = 1$ sein, dann ist der neue Baum auf jeden Fall vollständig reduziert (da Kanten aus X und aus Y beginnen) und die Länge hat sich nicht verringert. (Wegen Annahme 8.3.1 kann $\tilde{y}_jy$ nie zu 1 werden, vgl. 8.10.11 und 8.10.12.) Sonst muß man eine vollständige Reduktion (o.E. Globalkonjugation mit y^{-1}) durchführen:



Die Behauptung folgt nun daraus, daß die $y^{-1}y_i y$ paarweise verschieden und ungleich 1 sind bzw. daß die $y^{-1}y_j$ paarweise verschieden und (wegen Annahme 8.3.1) ungleich 1 sind.

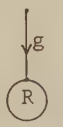
(iv) Extremitäten:

Wir beweisen zunächst Behauptung 8.10.3, da diese unabhängig von den zuvor ausgeführten FRK's ist:

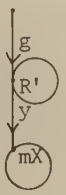
8.10.15:

Sei R ein beliebiges Gewicht, welches wir uns wie folgt zerlegt denken wollen: $R = mX + \Sigma\, m_i G_i$ mit $G_i \neq X, Y$. Dann ist $R' = \Sigma\, m_i G_i$ ein unter $c_X(y)$ unveränderliches Gewicht, denn die Einträge an den X und Y entsprechenden Stellen sind gleich (vgl. 5.1) .Es können auch mX bzw. R' Null sein.

Wir betrachten nun die beliebige Extremität

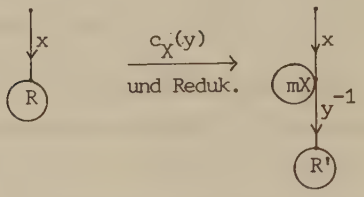


Ist g nicht aus X oder Y, so erhält man bei der Durchführung von $c_X(y)$ die Extremität:



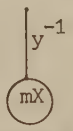
welche (für mX = 0) der Behauptung 8.10.3 genügt.

Sei nun g = x ∈ X:



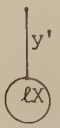
und 8.10. ist erfüllt (weil keine Kante, die nicht aus X oder Y stammt, vorkommt).

Extremitäten, die mit einer Kante aus Y enden, brauchen hier nicht untersucht zu werden, da sie in 8.10.16 - 18 noch behandelt werden. (Da niemals eine Extremität der Form



vor der Durchführung von $c_X(y)$ auftreten kann, gehen Extremitäten, die in Y enden, stets wieder in solche über.)

Die Bemerkung, daß neu ausgefahrene Extremitäten stets von der Form



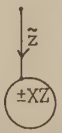
sein müssen, beendet den Beweis von 8.10.15.

Wir betrachten nun die Fälle $c_W(r) = c_X(z)$, $c_W(r) = c_Y(z)$ und $c_U(v) = c_Y(z)$, da sich aus den beiden erstgenannten die Aussagen für $c_U(v) = c_X(z)$ und $c_U(v) = c_Y(z)$ herleiten lassen.

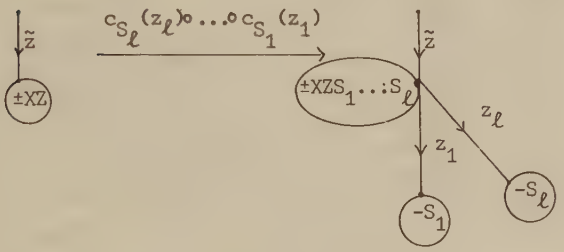
8.10.16 $c_W(r) = c_X(z)$:

(1) Nach der Durchführung von $c_X(z)$ haben wir mindestens eine Extremität der Form:

oder



Nach 8.7.4 werden weder X noch Z nach der Ausführung von $c_X(z)$ nochmals konjugiert, so daß sich die linke Extremität gar nicht mehr und die rechte nur noch beim Auftreten von $c_S(z')$ verändert.

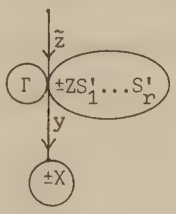


(muß noch reduziert werden)

Da Y nach Definition von $c_W(r)$ zwischen $c_X(z)$ und $c_X(y)$ nicht mehr konjugiert wird, kann das Gewicht $\pm XZS_1 \ldots S_\ell$ nicht zu Null werden, auch nicht durch weitere vor der Durchführung von $c_X(y)$ auszuführende FRK's.

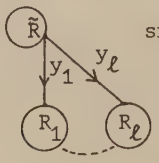
Man erhält also bei der Durchführung von $c_X(y)$ aus der linken Extremität:

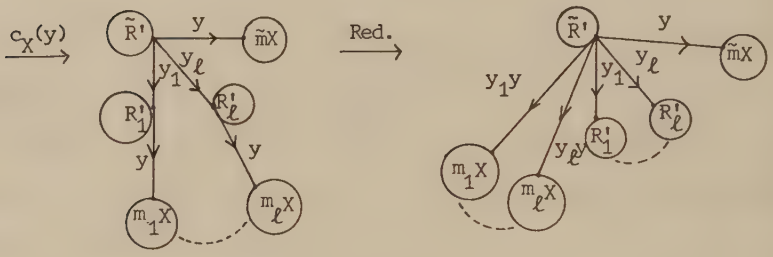
und aus der rechten:



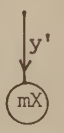
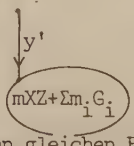
Γ ist hierbei ein Teilbaum, der mit Silben, die nicht aus X stammen, beginnt, und Kanten aus Y mit denen Γ beginnt, sind wegen

Annahme 8.3.1 nie gleich y. Damit ist 8.10.4 gezeigt.

(2) Als nächstes untersuchen wir Extremitäten mit dem Gewicht mX nach der Durchführung von $c_X(y)$. Wegen 8.10.15 brauchen wir nur Extremitäten zu untersuchen, die vor der Durchführung von $c_X(y)$ von der Form  sind. Es seien R_i und $\tilde{R}$ wie in 8.10.15 zerlegt.

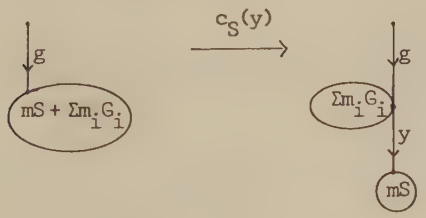


Sind die R_i' alle von Null verschieden, so findet an dieser Stelle keine Verkürzung statt, denn es ist $m_iX + R_j' \neq 0$ stets. Außerdem haben alle Extremitäten mit mX die in 8.10.2 geforderte Eigenschaft.

Um zu zeigen, daß vor $c_X(y)$ keine Extremität der Form  vorkommen kann, überlegen wir uns, daß wegen 8.10.3 nach der Durchführung von $c_X(z)$ alle Extremitäten die mit einer Kante aus Y enden, von der Form  sein müssen. Wie in (1) sieht man, daß sich an den gleichen Einträgen bei X und Z bis zur Durchführung von

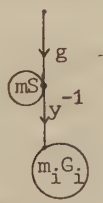
$c_X(y)$ nichts mehr ändert. Ein solches Gewicht kann niemals gleich mX sein.

Nun sind noch die bei der Durchführung von $c_S(y)$ neu entstehenden Extremitäten zu berücksichtigen



Hier ist $G_i \neq Y$ und $g \notin Y, S$.

Ist g aus $S \neq X, Y, Z$, so müssen in $mS + \Sigma m_i G_i$ die Koeffizienten von X und Z gleich sein und man erhält nach der Durchführung von $c_S(y)$ die Extremität , welche wegen $S \neq X, Z$ von der Form $\ell XZ + \Sigma r_i H_i$



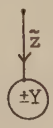
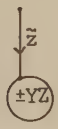
sein muß. Ist $g \in Y$, so ist nach dem oben gesagten nichts mehr zu zeigen, da auch die Gewichte $(mXZ + \Sigma m_i G_i) + (\ell XZ + \Sigma r_i H_i)$, sowie $(mXZ + \Sigma m_i G_i) + \ell S$ (es handelt sich um Gewichte, die eventuell bei Reduktionen entstehen), die Eigenschaft haben, daß die Einträge an den X und Z entsprechenden Stellen gleich sind.

Neu auszufahrende Extremitäten sind stets von der Form und

Extremitäten der Form gehen wieder in solche über (vgl. 8.10.15).

Dies beendet den Beweis von 8.10.16.

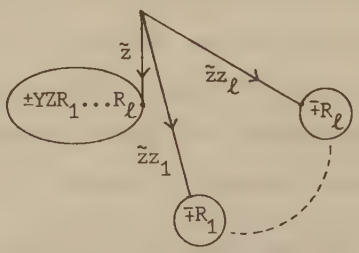
8.10.17 $c_W(r) = c_Y(z)$:

(1) Nach der Durchführung von $c_Y(z)$ haben wir mindestens eine Extremität der Form:  oder 

Nach 8.7.6 wird Z nicht mehr mit Silben, die nicht aus Y stammen, konjugiert. Wir schließen zunächst den Fall, daß im Anschluß an $c_Y(z)$ die FRK $c_Z(y')$ auszuführen ist, aus. Dann können sich die obigen Extremitäten nur noch verändern, wenn eine Gruppe $S \neq X,Y,Z$ mit Silben aus Y oder Z konjugiert wird.

Bei Konjugationen mit Silben aus Z (alle paarweise verschieden und ungleich z) verändert sich zunächst nur die rechte Extremität:

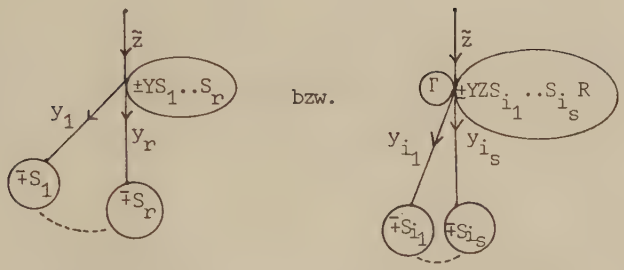
$c_{R_1}(z_1) \circ \ldots \circ c_{R_\ell}(z_\ell)$ und Reduktion →



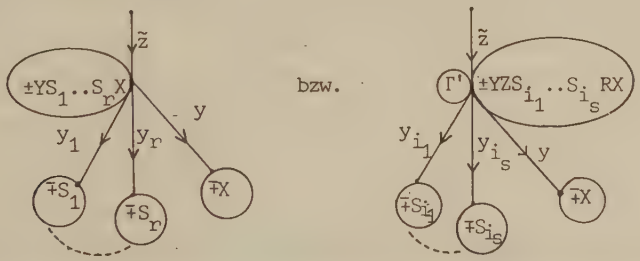
Das Gewicht $\pm YZR_1..R_\ell$ kann nicht zu Null werden, da die Gruppe X fehlt (vgl. 8.10.16).

Unter einer Sequenz $c_{S_1}(y_1) \circ \ldots \circ c_{S_r}(y_r)$ verändern sich nun beide

Extremitäten wie folgt:



Γ beginnt mit Kanten, die nicht aus X oder Y stammen und die Gewichte $\pm YS_1 \ldots S_r$ und $\pm YZ\, S_{i_1} \ldots S_{i_s} R$ sind ungleich Null, weil die Gruppe X fehlt. R ist von den vorhergehenden FRK's übrig und die S_{i_j} bezeichnen einige der S_i. Unter $c_X(y)$ erhält man:

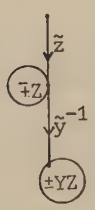


Γ' beginnt mit Kanten, die nicht aus X oder Y stammen und eine Reduktion ist nicht möglich, weil die y_i nach Annahme 8.3.1 von y verschieden sind.

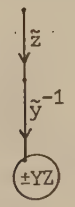
Wir betrachten nun den Fall, daß nach $c_Y(z)$ die FRK $c_Z(\tilde{y})$ auszuführen ist, also eine Situation der Form:

$$c_X(y) \circ c_{S_1}(y_1) \circ \ldots \circ c_{S_\ell}(y_\ell) \circ c_Z(\tilde{y}) \circ c_Y(z)$$

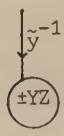
Unter $c_Z(\tilde{y})$ gehen die oben angegebenen Extremitäten über in:



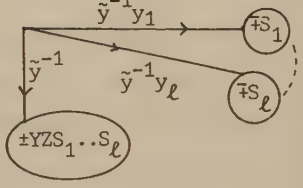
bzw.



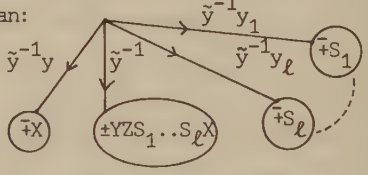
also:



$c_{S_1}(y_1) \circ \ldots \circ c_{S_\ell}(y_\ell)$
und Reduktion



Das Gewicht $\pm YZS_1..S_\ell$ kann nicht Null werden, da die Gruppe X nicht vorkommt. Unter $c_X(y)$ erhält man:



Nun kann $\pm YZS_1..S_\ell X$ zu Null werden, aber eine Verkürzung findet nicht statt, weil $\tilde{y}^{-1}y \neq 1$ und nach Annahme von allen $\tilde{y}^{-1}y_i$ verschieden ist.

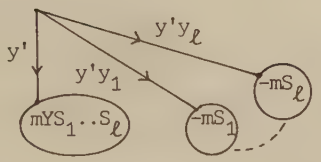
(2) Wie in 8.10.16 sind nun noch Extremitäten mit dem Gewicht mX nach der Durchführung von $c_X(y)$ zu untersuchen. Da nach der Durchführung von $c_Y(z)$ alle Silben aus Y von Silben aus Z umgeben sind (bis auf die Extremität

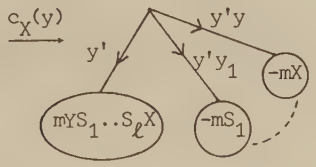
) sind nur Extremitäten

und zwi-

schen $c_Y(z)$ und $c_X(y)$ neu auszufahrende Extremitäten zu beachten. Wir behandeln zunächst die Extremitäten

. Sie bleibt unverändert bis eine Sequenz $c_{S_1}(y_1) \circ .. \circ c_{S_\ell}(y_\ell)$ vor $c_X(y)$ durchgeführt wird:



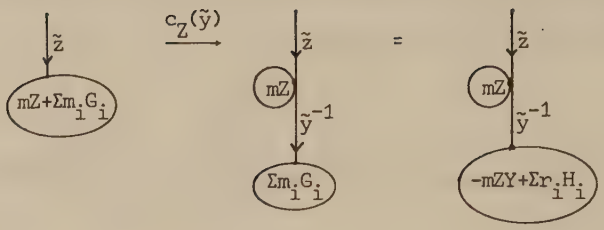


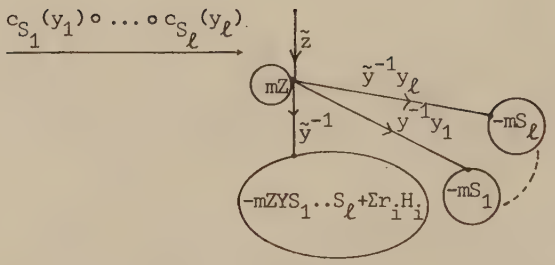
Das Gewicht $mYS_1..S_\ell$ kann wegen 8.6.3 nicht gleich -mX sein, so daß sich selbst für y'y = 1 die Länge des Baumes nicht verkürzt.

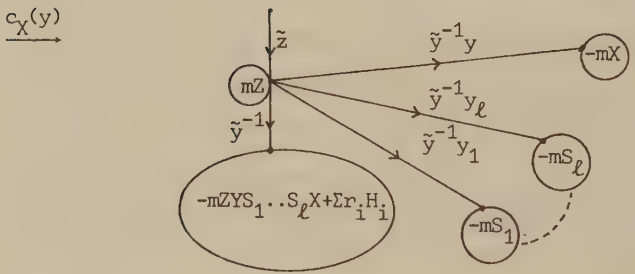
Daran ändert sich auch nichts, wenn der Anfangspunkt von y' ein Gewicht trägt oder dort noch andere Kanten aus Y beginnen, denn die $y'y_i$ bzw. y'y können nie zu y_i bzw. y werden. Gewichte, die bei einer Reduktion nach $mYS_1..S_\ell$ gelangen, müssen stets von der Form $m'S_i$ sein, wodurch das Gewicht nicht vollständig weggekürzt werden kann.

Für Extremitäten der Form

kann man wie unter (1) für die Sequenz $c_X(y) \circ c_{S_1}(y_1) \circ \ldots \circ c_Z(\tilde{y}) \circ c_Y(z)$ argumentieren:







Da die $\tilde{y}^{-1}y_i$ und $\tilde{y}^{-1}y$ paarweise verschieden und ungleich 1 sind, findet selbst dann keine Verkürzung statt, wenn das Gewicht am Ende von $\tilde{y}^{-1}$ zu 0 wird.

Kommt keine FRK $c_Z(\tilde{y})$ vor, so kann man für Extremitäten argumentie-

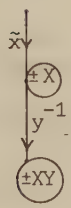
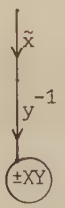
ren wie für Extremitäten mit g ∉ Y, Z. Hier ist nichts zu zeigen,

weil keine Kürzungen mit der vorhergehenden Silbe g stattfinden können und die Konjugationsfaktoren aus Y nach Annahme alle verschieden sind.

8.10.18 $c_U(v) = c_Y(x)$:

(1) Nach der Durchführung von $c_Y(x)$ hat man mindestens eine Extremität

der Form oder

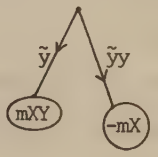
$c_X(y)$  oder 

Dies ist der einzige Fall, bei dem das Gewicht ±XY statt ±X an der Extremität, die für 8.10.4 existieren muß, nach der Durchführung von $c_X(y)$ auftaucht.

(2) Extremitäten der Form können vor der Ausführung von $c_X(y)$

nicht vorkommen, da nach der Durchführung von $c_Y(x)$ alle Silben aus Y von Silben aus X umgeben sind außer bei der Extremität

Hier hat man selbst für $\tilde{y} = y^{-1}$ keine Verkürzung:



Damit ist Behauptung 8.10 gezeigt.

□

Der Satz 8.9 ergibt sich nun aus der Tatsache, daß in allen oben beschriebenen Prozessen der Baum nicht verkürzt wurde und bei den nach 8.10.3 stets vorkommenden Extremitäten immer eine Verlängerung stattfindet.

□

Da echte Verringerungen der Länge nur durch Kürzungen von Buchstaben aus dem Baum hervorgerufen werden können, gilt analog zu Korollar 7.7:

8.11 KOROLLAR

Ist y ein Wort aus Y, welches sich nicht aus Buchstaben bzw. deren Inversen aus einem Baum Γ zusammensetzen läßt, so führt die Anwendung von $c_X(y)$ für alle freien Faktoren $X \neq Y$ zu einer Nicht-Verkürzung der vollständig reduzierten Länge von Γ.

□

Bisher haben wir nur Bäume betrachtet, die aus BP . (1,0,...,0) entstanden sind, also - nach Umnumerierung - die einbettbaren kanonischen Erzeugenden von π_2. Es gibt jedoch für $n > 3$ auch einbettbare Elemente (nämlich Summen von Erzeugenden), die auf beiden Seiten echte freie

Produkte abspalten.

Da die Tatsache, daß man mit BP .(1,0,...,0) beginnt, nur in 8.10.13 benutzt wird (Betrachtungen für den Basispunkt), läßt sich 8.9 verallgemeinern auf Bäume, die aus BP $(G_{k_1}..G_{k_\ell})$ entstanden sind, wenn man 8.10.13 verallgemeinert[1]:

8.12 KOROLLAR

Geht man von einer Folge von FRK's aus, die 8.3 erfüllt und gemäß 8.6 geordnet ist, so führt jede einzelne FRK aus dieser Folge zu einer Vergrößerung der vollständig reduzierten Länge eines aus BP $(G_{k_1}..G_{k_\ell})$ entstandenen Baumes.

BEWEIS

Die G_{k_j} werden kurz mit X_j bezeichnet. Wir können annehmen, daß $1 < \ell < n-1$, weil $X_1 + ... + X_{n-1} = X_n$ (vgl. 9.

Die erste "wirksame" FRK ist von der Form $c_{X_i}(y)$ oder $c_Y(x_i)$ mit $Y \neq X_j$ für $j = 1,...,\ell$. Alle FRK's von anderer Form, die rechts von einr solchen stehen oder sich nach rechts an ihr vorbeischieben lassen, werden vernachlässigt.

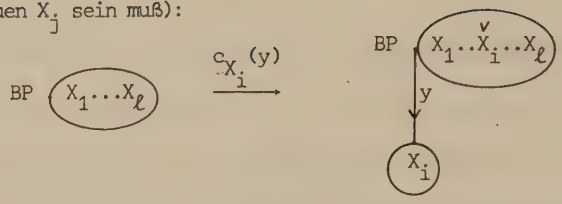
Es sei o.E. die erste FRK in der neuen Folge von der Form $c_{X_i}(y)$ (handelt es sich um $c_Y(x_i)$, wendet man die Umformung

$S_{k_1} + ... + S_{k_\ell} = -(S_{k_{\ell+1}} + ... + S_{k_n})$ an, multipliziert die betrachtete Sphäre mit -1 und beginnt mit BP . $(X_{\ell+1}...X_n)$, wobei nun Y gleich einem

---

[1] Satz 5.1 läßt sich leicht auf diesen Fall verallgemeinern, wenn man statt der ersten Spalte der Matrix eine Summe von Spalten betrachtet.

der neuen X_j sein muß):

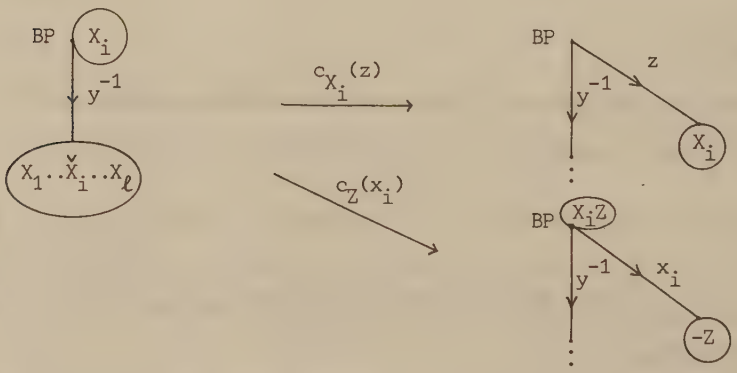


Die nächsten auszuführenden FRK's können von der Form:

$c_{X_i}(z)$, $c_Z(x_i)$, $c_{X_j}(z)$, $c_Z(x_j)$, mit $Z \neq Y$ und $i \neq j$ oder $c_Y(x_i)$ oder $c_{X_j}(\tilde{y})$ mit $\tilde{y} \neq y$ sein.

$c_{X_i}(z)$, $c_Z(x_i)$:

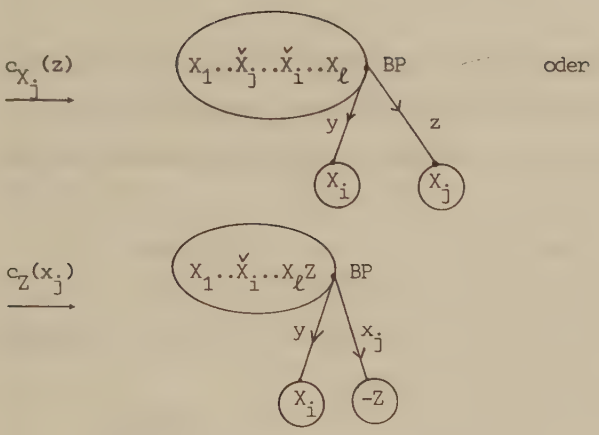
Hier schieben wir wie in 8.10.13 die Identität $k(y)k(y^{-1})$ ein und erhalten den Baum:



Wir haben also die gewünschte Verzweigung ($Z \neq Y$!).

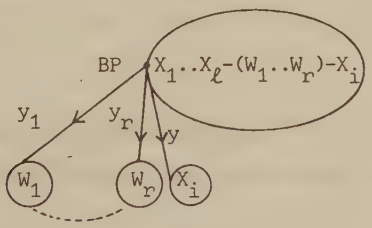
$c_{X_j}(z)$, $c_Z(x_j)$:

Hier muß $Z \neq X_k$ sein für $i \neq k = 1, \ldots \ell$, weil man sonst die FRK nach rechts herausschieben und weglassen könnte.



$c_{X_j}(\tilde{y})$:

Hier hat man eine Sequenz: $c_{W_1}(y_1)\circ\ldots\circ c_{W_r}(y_r)\circ c_X(y)$ zu untersuchen, wobei die W_s verschiedene der X_j ($j \neq i$) bezeichnen, denn sonst wären die FRK's "wirkungslos".



Es muß sichergestellt werden, daß das Gewicht am Basispunkt nicht Null wird. Dazu nehmen wir an, daß $r = \ell-1$ ist und führen (analog zu 8.10.13) folgende Umformung durch:

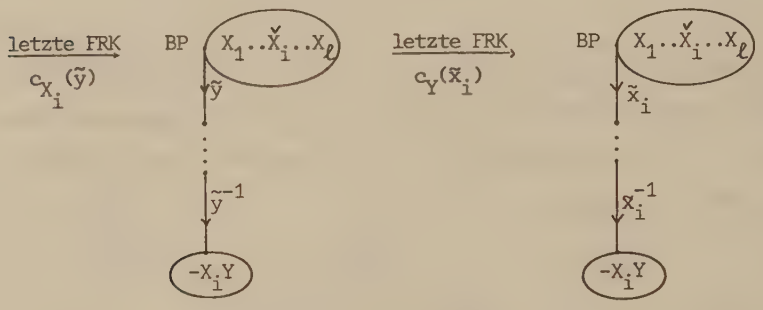
$$c_{W_1}(y_1)\circ..\circ c_{W_r}(y_r)\circ c_{X_i}(y) \hat{=} k(y)\circ c_{W_1}(y_1y^{-1})\circ\ldots\circ c_{W_r}(y_ry^{-1})\circ \tilde{c}_{\ell+1}\circ\ldots\circ\tilde{c}_n$$

Die Globalkonjugation k(y) wird nach links herausgeschoben und die FRK's $\tilde{c}_i := c_{X_i}(y^{-1})$, $i = \ell+1,\ldots,n$, werden als wirkungslos weggelassen. Nun kann das Gewicht am Basispunkt nicht Null werden und die nächste

FRK muß eine der vier ersten oben beschriebenen sein (da in der Sequenz ursprünglich mindestens zwei FRK's vorkamen, kann eine FRK der Form $c_Y(z)$ folgen). Damit erhält man in diesem Fall die gewünschte Verzweigung.

$c_Y(x_i)$:

Hier gelangt man u.U. zu einem ganzen Abschnitt mit FRK's, die abwechselnd die Form $c_Y(\tilde{x}_i)$ und $c_{X_i}(\tilde{y})$ annehmen:



Das Gewicht am Ende von $\tilde{y}^{-1}$ bzw. $\tilde{x}_i^{-1}$ existiert auf jeden Fall in dieser Form, im Inneren des Baumes können noch Teilbäume abzweigen.

Auf $c_{X_i}(\tilde{y})$ können noch die ersten vier oben angegebenen FRK's folgen (dann ist man fertig, wenn man - falls nötig - das Gewicht $-X_iY$ an den Basispunkt bringt) oder eine Sequenz von FRK's der Form $c_{W_i}(y_i)$. Wir bringen das Gewicht $-X_iY$ zum Basispunkt, dann fällt im Verlauf der Sequenz das Gewicht am Basispunkt wegen 8.6.3 nicht weg. Eine im Anschluß an diese Sequenz durchzuführende FRK darf nicht von der Form $c_Z(\hat{y})$ oder $c_Y(z)$ sein. Kommutiert sie nicht mit dem Rest der Folge, so argumentiert man wie in 8.10.13 und erhält die gewünschte Verzweigung. Kommutiert sie mit dem Rest der Folge, wird aber trotzdem nicht

herausgeschoben, so muß sie von der Form $c_{X_j}(z)$ oder $c_Z(x_j)$ für $i \neq j$ und $Z \neq X_k$, $k = 1,\ldots,\ell$ sein. Dann kann das Gewicht $X_1 \ldots X_i \ldots X_\ell$, welches ursprünglich am Basispunkt stand im Verlauf der Sequenz nicht zu Null geworden sein, denn eines der X_j ist nicht mit einem Faktor aus Y konjugiert worden. Man kann also vor der Anwendung der Sequenz alles beim alten lassen und erhält mit der nächsten FRK eine Verzweigung am Basispunkt.

Auf $c_Y(\tilde{x}_i)$ können noch FRK's der Form $c_Y(z)$, $c_Z(y)$ für $Z \neq X_i$ oder $c_Z(x_j)$, $c_{X_j}(z)$ mit $j \neq i$ und $Z \neq X_k$, $k = 1,\ldots,\ell$ folgen, für die man wie oben argumentiert oder eine Sequenz von FRK's der Form $c_{W_s}(x_{is})$. Diese Situation wird analog zu der eben beschriebenen behandelt und die Bemerkung, daß die neuen Bäume mit der gewünschten Verzweigung stets 8.10 erfüllen und bis dorthin eine Verlängerung bei jedem Schritt zu verzeichnen war, beendet den Beweis von 8.12.

□

Damit ist es im allgemeinen Fall möglich, einen Algorithmus des Typs 7.8 zu beschreiben, womit es jedoch wegen Annahme 8.3 nicht möglich ist, alle eingebetteten Elemente von π_2 zu identifizieren, sondern nur bestimmte Konjugationsklassen von einbettbaren Elementen aus π_2:

8.13 DEFINITION

8.13.1 Eine Zerlegung von π_1 heißt *entartungsfrei*, wenn sie durch eine Folge von FRK's, die 8.3 erfüllt, erzeugt werden kann.

8.13.2 Ein Erzeugendensystem von π_2 heißt *entartungsfrei*, wenn es zu einer entartungsfreien Zerlegung von π_1 gehört.

8.13.3 Ein Element von π_2 heißt *entartungsfrei*, wenn es durch Addition von entartungsfreien Erzeugenden entsteht.

Diese Definition wird durch Annahme 8.3 nahegelegt, welche unnatürlich und durch die Beweistechnik gegeben ist. Man kann einem Element von π_2 nicht von vornherein ansehen, ob es zu der oben beschriebenen Klasse gehören kann, dies wird erst durch den Algorithmus entschieden. Wegen Bemerkung 8.4.4 kann man sagen, daß es mindestens so viele entartungsfreie Erzeugendensysteme gibt, wie es Erzeugendensysteme im Fall $n = 3$ gibt und darüber hinaus erhält man entartungsfreie Erzeugendensysteme durch Folgen, in denen kein Vertauschen möglich ist, d.h. durch Folgen der Form $\ldots \circ c_X(y) \circ c_Y(z) \circ c_Y(w) \circ c_W(r) \circ \ldots$ usw.

8.14 THEOREM

Sei $\pi_1 = G_1 * \ldots * G_n$ $(n > 3)$ ein freies Produkt aus unendlichen, unzerlegbaren Faktoren ungleich $\mathbb{Z}$, dann kann man durch folgenden Algorithmus entscheiden, ob ein bzgl. des Standarderzeugendensystems (zur Zerlegung $G_1 * \ldots * G_n$) gegebenes Element S aus π_2 durch eine entartungsfreie Einbettung realisierbar ist:

8.14.1 Es werde der Augmentierungshomomorphismus $\alpha: \mathbb{Z}\pi_1 \to \mathbb{Z}$ auf den Koeffizienten von S ausgewertet, wobei sich der Wert $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ mit $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ und mindestens zweien der $\varepsilon_i = 0$ ergeben muß, wenn man ein geeignetes Vielfaches von $(S_1 + \ldots + S_n)$ zu S hinzuaddiert und S eventuell mit -1 multipliziert (vgl. 3.5). Ist dies nicht der Fall, so kann man S nicht durch eine Einbettung (allgemein gültig, da hier 8.3 nicht eingeht) realisieren.

8.14.2 Man zeichne einen Baum zu S (vgl. 4.8.2-3) und reduziere ihn vollständig: Γ.

8.14.3 Ist Γ von der Form BP $(G_{k_1}..G_{k_\ell})$, so ist man fertig, da S zu der Summe $S_{k_1} + .. + S_{k_\ell}$ global konjugiert und damit einbettbar ist.

8.14.4 Für alle in Γ vorkommenden Buchstaben und Buchstabenkombinationen $y \in Y$ und alle Gruppen $X \neq Y$ versuche man die FRK's $c_X(y)$ und $c_X(y^{-1})$ (es sind nur endlich viele, weil Γ nur endlich viele Kanten und jede Kante nur endlich viele Buchstaben hat). Führt keine dieser FRK's zu einer Verkürzung der vollständig reduzierten Länge von Γ, so läßt sich S nicht durch eine entartungsfreie Einbettung realisieren (denn alle anderen denkbaren FRK's können nach Korollar 8.11 nicht zu einer Verkürzung führen).

8.14.5 Führen eine oder mehrere der in 8.14.4 bestimmten FRK's zu einer Verkürzung, so fahre man mit dem neuen (kürzeren!) Baum bei 8.14.3 fort.

8.14.6 Der Prozeß endet nach endlich vielen Schritten entweder mit der Entscheidung, daß S nicht entartungsfrei einbettbar ist oder in 8.14.3 mit dem Baum BP $(G_{k_1}..G_{k_\ell})$

BEWEIS

Nach 4.14 weiß man, daß es zu einer Konjugationsklasse von Elementen aus π_2 nur endlich viele vollständig reduzierten Bäume geben kann und ihre Länge ist eindeutig bestimmt. Zu einem entartungsfreien Element von π_2 gibt es nach 8.9 eine Folge von FRK's, die den zugehörigen Baum

durch ständige Verlängerun aufbaut. Da FRK's globalkonjugierte Bäume wieder in solche überführen, kann man die verkürzende Folge auch mit Hilfe von Γ bestimmen (vgl. 6.2.3 und 7.1). Da nach 8.11 nur solche FRK's zu einer Verkürzung des Baumes führen können, deren Konjugationsfaktoren sich aus den Buchstaben des Baumes oder deren Inversen zusammensetzen lassen, sind nur endlich viele FRK's zu überprüfen. □

Leider läßt sich nicht wie im Fall n = 3 ablesen, welche FRK zu einer Verkürzung führt, wenn man die Prozesse 4.14.1 - 2 anwendet, denn durch das mögliche Aufeinandertreffen von FRK's der Form $c_X(y)\ c_Y(x)$ kann man an der nach 8.10.4 existierenden Extremität den Konjugationsfaktor nicht mehr ablesen (vgl. 8.10.17), jedoch liefert die in 8.10 hergeleitete Struktur des Baumes zu einem entartungsfrei eingebetteten Element ein notwendiges Kriterium für entartungsfreie Einbettbarkeit, sowie eine kleine Vereinfachung des Algorithmus:

8.15 KOROLLAR

8.15.1 Gehört ein vollständig reduzierter Baum zu einem entartungsfrei eingebetteten Element von π_2, so muß er eventuell nach Anwendung von Prozessen der Form 4.14.1 - 2 mindestens eine Extremität der Form:

oder

$w' \in W$

besitzen.

8.15.2 Es reicht in 8.14.4 diejenigen FRK's $c_X(y)$ bzw. $c_X(y^{-1})$ auszuprobieren für die es eine der oben beschriebenen Extremitäten mit $Z = X$ und $W = Y$ gibt. (Es bleiben dennoch wegen der oben beschriebenen Schwierigkeit alle aus Γ zu gewinnenden $y \in Y$ auszuprobieren.)

□

Wie in Kapitel 7 bietet sich die Möglichkeit, die von einer als entartungsfrei identifizierten Sphäre S induzierte Zerlegung von π_1 zu bestimmen.

8.16 KOROLLAR

Man kann von einer entartungsfrei eingebetteten Sphäre S, die bzgl. des Erzeugendensystems $S_1,\ldots,S_n$ zu $G_1 * \ldots * G_n$ gegeben ist, bestimmen, in welche Gruppen sie die Fundamentalgruppe zerlegt.

BEWEIS

Da es sich bei S um ein entartungsfreies Element von π_2 handelt, läßt sich ein zu S gehörender vollständig reduzierter Baum mit Hilfe des Algorithmus 8.14 bis zum Baum BP $(G_{k_1}..G_{k_\ell})$ verkürzen. Die hierbei benutzte Folge von FRK's (einschließlich Globalkonjugationen) liefert invertiert und auf $(G_{k_1} * \ldots * G_{k_\ell}) * (G_{k_{\ell+1}} * \ldots * G_{k_n})$ angewendet die gesuchte Zerlegung von π_1.

□

9. Anhang: Die grundlegenden Sätze

Es werden die in Kapitel 1 angerissenen Voraussetzungen für die Argumentation in dieser Arbeit kurz dargestellt. Dieses Kapitel ist eine Zusammenfassung von Sätzen aus [W], wo die Frage der Einbettbarkeit von Elementen aus $\pi_2(M,x_o)$ mit geometrischen Methoden untersucht wird.

Sei M eine geschlossene, orientierbare, dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit Basispunkt x_o. Wir können nach dem Satz von Moise (vgl. [M]) und dem Satz über simpliziale Approximation (vgl. [Spa]) annehmen, daß M trianguliert ist und jedes Element aus $\pi_1(M,x_o)$ bzw. $\pi_2(M,x_o)$ einen Pl-Repräsentanten hat, daher wird die Vorsilbe "PL" bei Abbildungen und Mannigfaltigkeiten im folgenden weggelassen. Weiterhin kann man annehmen, daß alle Schnitte transversal sind (vgl. [H]). Ist P ein kompakter Unterkomplex von M, so ist eine reguläre Umgebung von P eine Pl-Untermannigfaltigkeit, deren zugrunde liegender Komplex auf P zusammenklappt (vgl. [H]).

Damit die zweite Homotopiegruppe von M nichttrivial ist, muß nach dem Sphärentheorem und dem Satz von Seifert-van Kampen (vgl. [H]) die Fundamentalgruppe mindestens $\mathbb{Z}$ oder ein echtes freies Produkt sein. Sei also $\pi_1(M,x_o) = G_1' * \ldots * G_n' = \mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z} * A_1 * \ldots * A_k$ ($A_j \neq \mathbb{Z}$ und unzerlegbar bzgl. $*$, für $1 \leq j \leq k \leq n$), dann gibt es ein Sphärensystem, welches obige Aufspaltung realisiert:

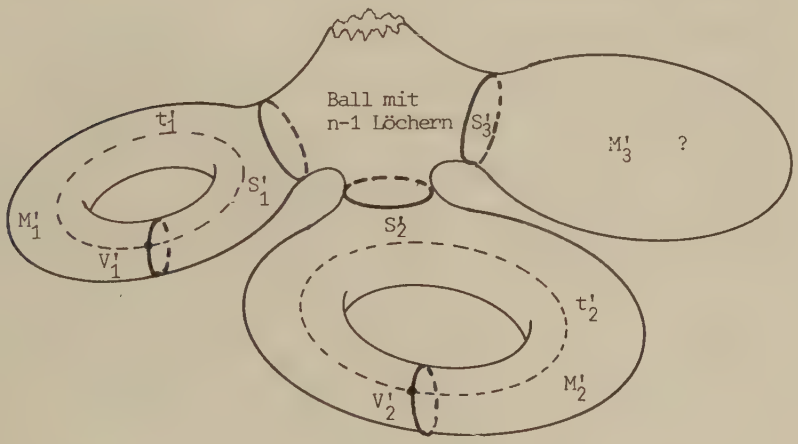
9.1 Lemma

Sei $\pi_1 = G_1' * \ldots * G_n'$ wie oben, dann gibt es ein disjunktes eingebettetes Sphärensystem $S_1', \ldots, S_n'$, $V_1', \ldots, V_{n-k}'$, so daß:

9.1.1 Die S_i' zerlegen M, so daß S_i' eine Teilmannigfaltigkeit M_i' abspaltet, die höchstens noch V_i' enthält und deren Fundamentalgruppe isomorph zu G_i' ist.

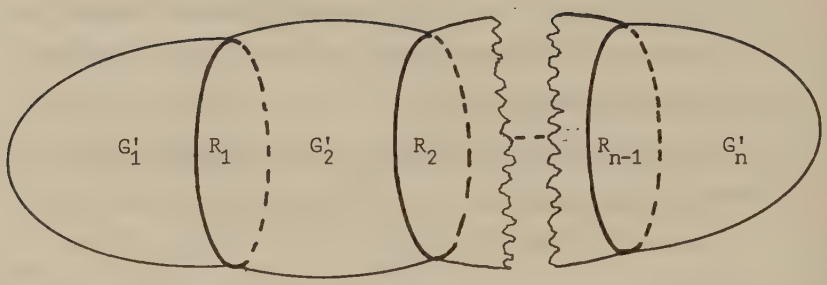
9.1.2 Die V_i' zerlegen M nicht, und es gibt einen Repräsentanten t_i' eines Erzeugenden von $\pi_1(M_i') \cong \mathbf{Z}$, der V_i' genau einmal trifft.

Diesen Sachverhalt kann man dadurch verdeutlichen, daß man ein zweidimensionales Modell zeichnet (M wird durch eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit und die 2-Sphären durch 1-Sphären ersetzt).

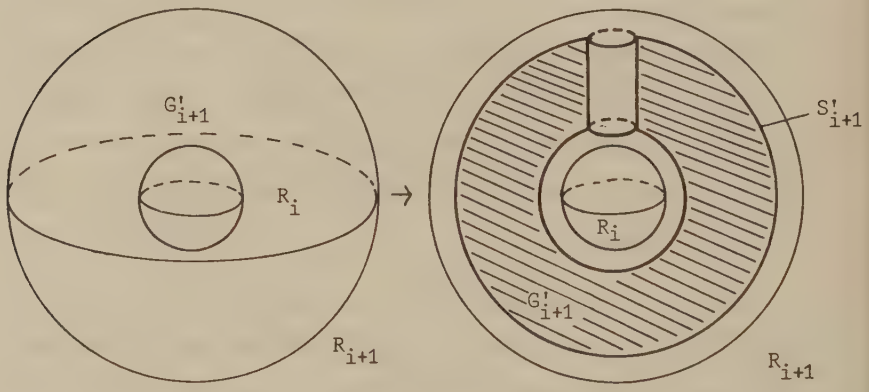


BEWEIS

Durch sukzessive Anwendung des Satzes von Kneser (vgl. [H]) erhält man eingebettete disjunkte Sphären $R_1,\ldots,R_{n-1}$, die G_1', $G_1' * G_2'$, ..., $G_1' * \ldots * G_{n-1}'$ abspalten.



Aus dieser Zerlegung wird durch folgenden Prozeß eine Zerlegung der Form 9.1.1 konstruiert:



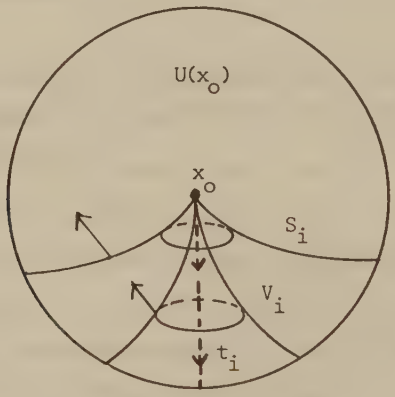
Da sich die Veränderung stets auf das zwischen R_i und R_{i+1} liegende Gebiet beschränkt, das keine weiteren Sphären mehr enthält, bekommt man so das gewünschte Sphärensystem $S'_1,\ldots,S'_n$, wobei $S'_1 = R_1$ und $S'_n = R_n$ ist. Die Teilmannigfaltigkeit, die von keiner der Sphären abgetrennt wird, ist dann notwendig ein Ball mit Löchern, wenn M die Poincaré'sche Vermutung erfüllt. (Diese Bedingung braucht man nicht, da man falsche drei-Zellen den Teilmannigfaltigkeiten zu-

schlagen kann.) Die Mannigfaltigkeiten, deren Fundamentalgruppe unendlich zyklisch ist, haben nach [Sp] auch eine unendlich zyklische zweite Homotopiegruppe. Mit dem Sphärentheorem erhält man eine eingebettete nicht nullhomotope Sphäre V_i', die nach dem Satz von Seifert-can Kampen nichtzerlegend sein muß und einen Repräsentanten t_i' eines Erzeugenden von $\pi_1 \cong \mathbf{Z}$ genau einmal schneidet. Dies beweist 9.1.2. □

Um zu einem Erzeugendensystem von π_2 zu gelangen, wählen wir einen Basispunkt x_o in dem von allen Sphären S_i' berandeten Ball mit Löchern und "ziehen" die S_i' und V_i' an x_o heran. (Dies geschieht exakt durch Wahl von Wegen, die die S_i' mit x_o verbinden, ohne sich zu schneiden und anschließendes "Aufdicken" dieser Wege. Danach kann man die V_i' mit dem Basispunkt verbinden, ohne die neuen Sphären zu treffen. Aufdicken liefert auch hier die gewünschten Sphären (vgl. 9.5). In dem zweidimensionalen Modell hat man folgende Situation:

Die abgetrennten Mannigfaltigkeiten werden M_i genannt und $\pi_1(M_i)$ wird mit G_i bezeichnet. Die aus S_i' neuentstandenen Sphären - S_i genannt - werden

so orientiert (d.h. mit einer positiven Normalen versehen), daß ihre positive Normale in das gemeinsam mit den anderen Sphären S_j berandete Gebiet hineinzeigen. Ist ein Repräsentant t_i von einem Erzeugenden von $G_i \cong \mathbb{Z}$ bestimmt, so werde die durch den oben beschriebenen Prozeß des Heranziehens entstandene Sphäre V_i so orientiert, daß t_i auf der negativen Seite von V_i beginnt. In einer Umgebung von x_o haben wir also folgende Situation:



Werden mit $[f_i]$ bzw. $[g_i]$ bzw. $[w_i]$ die Homotopieklassen der Abbildungen bezeichnet, die die Bilder S_i bzw. V_i bzw. t_i mit der oben angegebenen Orientierung haben, dann gilt:

9.2 SATZ

Es wird $\pi_2(M,x_o)$ als $\mathbb{Z}\pi_1$-Modul erzeugt von $[f_i]$, $i = 1,\ldots,n$ und $[g_j]$, $j = 1,\ldots,n-k$ und es gelten folgende Relationen:

9.2.1 $\sum_{i=1}^{n} [f_i] = 0$

9.2.2 $[g_i] - [g_i]\cdot[w_i] = [f_i]$, für $i = 1,\ldots,n-k$, wenn $\cdot$ die Standardoperation von π_1 auf π_2 bezeichnet.

9.2.3 $[f_i]\left(\sum_{[\gamma_i]\in G_i} [\gamma_i]\right) = 0$, falls G_i endlich.

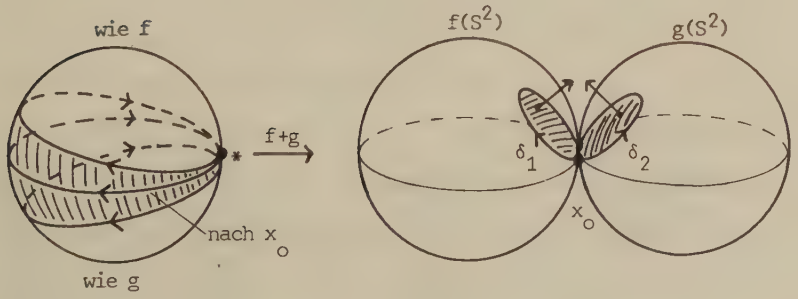
BEWEIS

Daß die oben angegebenen Relationen gelten, läßt sich leicht nachrechnen, der Beweis der ganzen Aussage findet sich in [S]. □

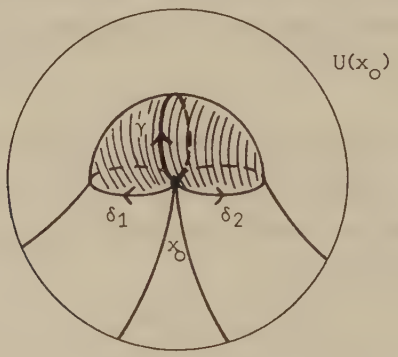
Als nächstes wird für die beiden $\mathbb{Z}\pi_1$-Modul-Operationen, nämlich Summenbildung und Globalkonjugation mit Elementen aus π_1 gezeigt, daß sie unter gewissen Umständen einbettbare Elemente wieder in einbettbare Elemente überführen.

9.3 SATZ

Seien $f,g: (S^2,*) \to (M,x_o)$ Einbettungen, die sich nur in x_o treffen. Zeigen die positiven Normalen von $f(S^2)$ und $g(S^2)$ in einer Umgebung des Basispunktes beide in das gemeinsam berandete Gebiet oder beide heraus, so hat auch $[f] + [g]$ einen eingebetteten Repräsentanten.



Da mit S auch -S eingebettet ist, können wir annehmen, daß die positiven Normalen der betrachteten Sphären wie in der Skizze angegeben liegen. Der Äquator der Standardsphäre wird ganz nach x_o abgebildet. In einer Umgebung $U(x_o)$ führt man folgende Konstruktion durch:



Im nicht schraffierten Bereich werde wie f + g abgebildet (vgl. Definition von π_2). Der Äquator wird homöomorph auf γ abgebildet, wobei die Orientierung zu berücksichtigen ist. Zwischen δ_1 und γ sowie δ_2 und γ wird die Abbildung stetig fortgesetzt, was möglich ist, da durch die Stellung der positiven Normalen die Kurven δ_1 und δ_2 kohärent orientiert sind. Die so erzeugte neue Abbildung h unterscheidet sich nur in einem Ball um x_o von f + g, daher gilt: [f] + [g] = [h] und mit h hat man die gesuchte Einbettung gefunden.

□

9.4 BEMERKUNG

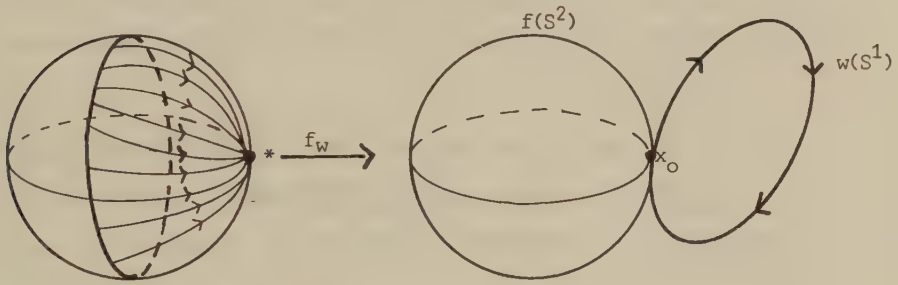
Nach einer Mitteilung von F. Laudenbach hat [f] + [g] keinen eingebetteten Repräsentanten, wenn die positiven Normalen "falsch" orientiert sind.

9.5 SATZ

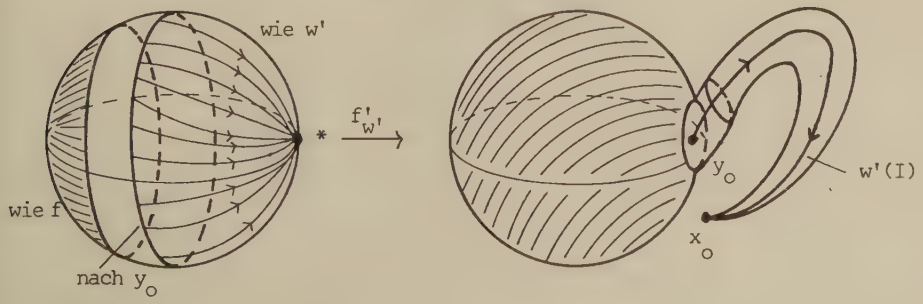
Seien $f: (S^2,*) \to (M,x_o)$ und $w: (S^1,*) \to (M,x_o)$ Einbettungen, dann kann das Element $[f]\cdot[w]$ durch eine Einbettung realisieren. (Daß w eine Einbettung sein soll, stellt keine Einschränkung dar, da man jedes Element aus π_1 in einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit durch eine Einbettung realisieren kann.)

BEWEIS

Wir betrachten zunächst den Fall, daß $w(S^1) \cap f(S^2) = \{x_o\}$.



Der dick gezeichnete Längskreis und * werden nach x_o abgebildet, das schraffierte Gebiet dazwischen wird faserweise wie w abgebildet und der Rest der Sphäre wie f. Die so konstruierte Abbildung f_w wird durch folgenden Prozeß in eine Einbettung umgewandelt:

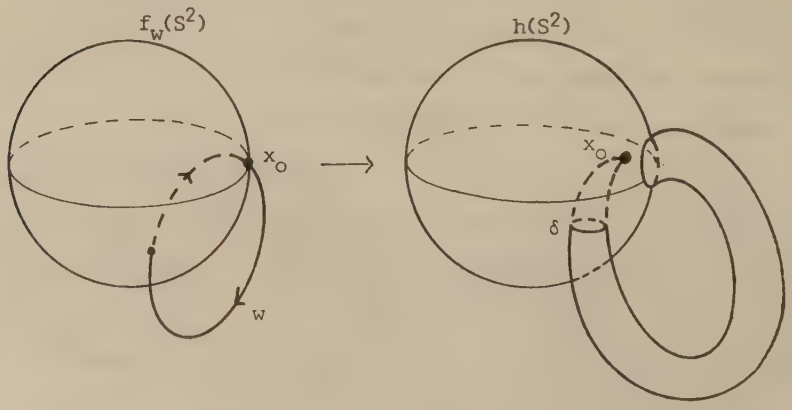


Zunächst wird f_w so abgeändert, daß der dick eingezeichnete Längskreis nicht mehr nach x_o sondern auf einen Punkt y_o in einer Umgebung von x_o abgebildet wird. Von y_o nach x_o verläuft der Weg w'(I) und wir haben f_w in die Abbildung $f'_{w'}$ umgewandelt. Diese wird nun homotop in eine Einbettung deformiert, indem man die auf w'(I) abgebildeten Fasern auf den Rand einer regulären Umgebung von w'(I), die linke Hälfte der Sphäre wie gehabt abbildet und die Abbildung auf dem Grenzstreifen zwischen linker und rechter Sphärenhälfte stetig fortsetzt.

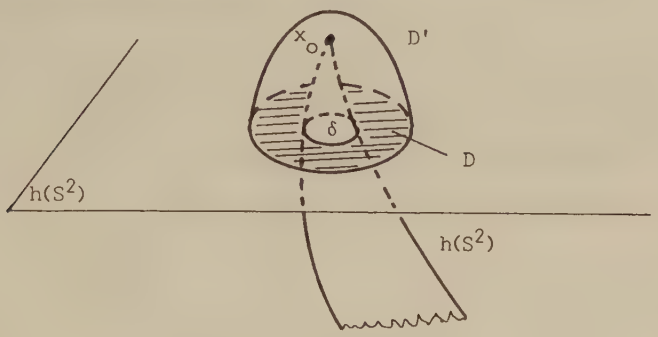
Da sich die reguläre Umgebung von w'(I) auf w'(I) zusammenziehen läßt, ist die neue Abbildung h(mod*) homotop zu der Abbildung $f'_{w'}$, die wieder zu f_w homotop ist, weil x_o und y_o in einem Ball liegen, also $[h] = [f]\cdot[w]$.

Wir betrachten nun den Fall, daß $w(S^1)$ das Bild von S^2 schneidet, wobei wir annehmen können, daß es endlich viele Schnittpunkte gibt, da es sich um Pl-Einbettungen im allgemeiner Lage handelt.

Sei h die wie oben konstruierte Abbildung. Sie ist keine Einbettung mehr, da es Selbstdurchdringungen (z.B. die Doppellinie δ) gibt.

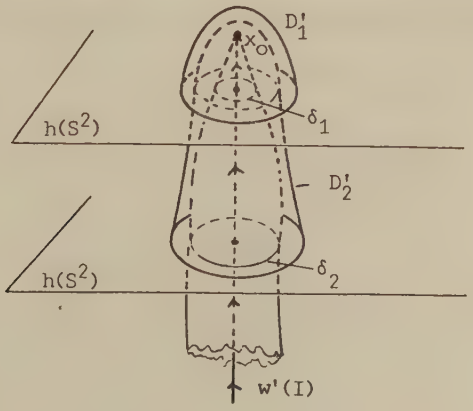


Wir ändern h gemäß folgender Vorschrift ab:



Die Scheiben D und D' beranden einen Ball (wähle D' als Teil des Randes einer etwas aufgedickten regulären Umgebung von w'(I)), daher ist die Abbildung h', die aus h durch ersetzen von D durch D' hervorgeht, modulo * zu h homotop.

Hat man mehr als eine Doppellinie, so führt man die oben beschriebene Konstruktion mehrfach aus, wobei man mit der am nächsten zum Basispunkt gelegenen Doppellinie δ_1 beginnt. Dabei ist darauf zu achten, daß sich die benutzten Scheiben D'_j nicht schneiden, was durch Abheben stets zu erreichen ist.



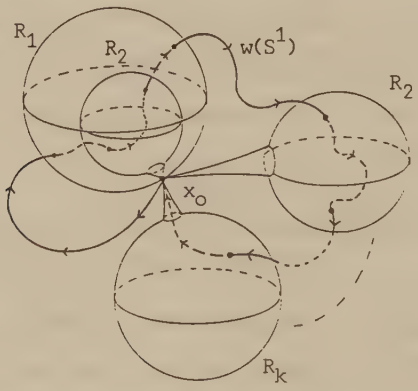
□

9.6 KOROLLAR

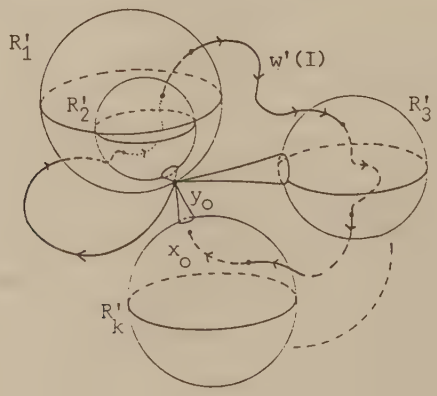
Durch Globalkonjugation mit einem Element [w] aus $\pi_1(M,x_o)$ geht ein eingebettetes bis auf x_o disjunktes 2-Sphärensystem wieder in ein solches über. Insbesondere erhält man auf diese Art aus einem eingebetteten disjunkten Erzeugendensystem von π_2 als $\mathbb{Z}\pi_1$-Modul wieder ein Erzeugendensystem mit diesen Eigenschaften.

BEWEIS

Wir gehen von folgender Situation aus (2-Sphärensystem: $R_1,\ldots,R_k$):

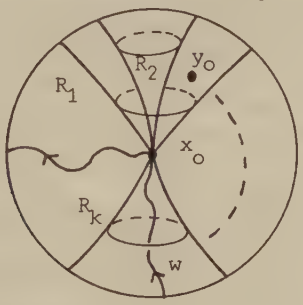


Dies kann wie beim Übergang von f_w zu $f'_{w'}$ in 9.5 abgewandelt werden zu:



Hier ist y_o ein Punkt in einer Umgebung von x_o, der auf keiner der betrachteten 2-Sphären, noch auf $w(S^1)$ liegt.

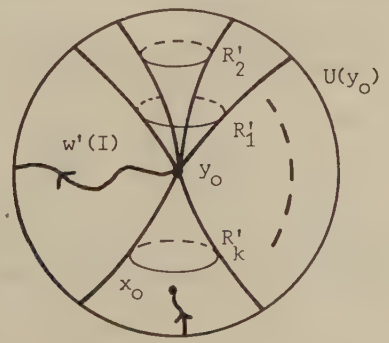
(Da M eine Mannigfaltigkeit und alle Einbettungen Pl sind, können wir uns die Situation in einer Umgebung von x_o stets wie folgt vorstellen:



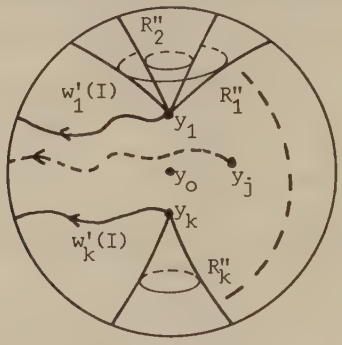
)

Für jeden der (endlich vielen) Schnittpunkte von w'(I) mit dem Sphärensystem wird nun die zum Übergang von h nach h' in 9.5 analoge Konstruktion ausgeführt, d.h. beginnend mit dem, von x_o aus gesehen, ersten Schnittpunkt wählen wir auf der jeweiligen Sphäre Scheiben um den Schnittpunkt um den Schnittpunkt aus und ziehen sie über x_o hinweg. Dabei mögen die einzelnen Scheiben sich nicht treffen, sondern wie Zwiebelschalen übereinander liegen (vgl. 9.5).

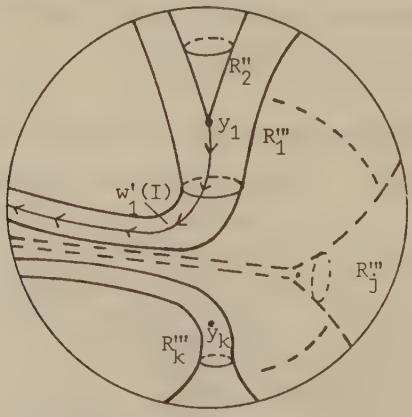
Von nun an können wir annehmen, daß w'(I) und das Sphärensystem bis auf y_o disjunkt sind. In einer Umgebung von y_o hat man dann folgende Situation:



Für die Sphären R_i' , die den Teil von $U(y_o)$ beranden, der den Anfang von $w'(I)$ enthält, wählt man Punkte y_i , nicht auf dem Sphärensystem oder auf $w'(I)$, in dem jeweils anderen Teil von $U(y_o)$ aus. Dann gibt es eine (mod x_o) homotope Abänderung des Sphärensystems in folgendes:



Durch Abheben kann man erreichen, daß sich weder die Wege w_i' (I) noch ihre regulären Umgebungen außer in x_o treffen. Dann lassen sich die Sphären $R_i''[w']$ durch Einbettungen realisieren, die bis auf x_o disjunkt sind und die noch nicht abgewandelten Sphären des Systems nicht treffen. Wir haben nun folgende Situation:



Jetzt lassen sich sukzessive die innerhalb von R_j''' liegenden Sphären mit $[w_i']$ konjugieren und durch eine Einbettung realisieren.

Damit ist der erste Teil von 9.6 gezeigt. Der zweite Teil der Behauptung folgt nun aus der in 3.1 bewiesenen Tatsache, daß Sg die Gruppe $g^{-1}Hg$ abspaltet wenn S die Gruppe H abspaltet.

□

Zuletzt wird ein Fall beschrieben, in dem man die einbettbaren Elemente von π_2 angeben kann.

9.7 SATZ

Sei M eine geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit mit unendlich zyklischer Fundamentalgruppe. Dann ist $\pi_2(M,x_o) \cong \mathbb{Z}$ und wird erzeugt von einer nicht-zerlegenden Sphäre V. Die einzigen nichttrivialen durch eine Einbettung realisierbaren Elemente von $\pi_2(M,x_o)$ sind dann $\pm V$.

BEWEIS

Der erste Teil der Aussage folgt aus 9.2. Sei nun S eine beliebige nichtnullhomotope Einbettung. Wie in 9.1 folgt, daß S nicht-zerlegend ist. Durch Aufschneiden an S erhält man also eine Mannigfaltigkeit M', deren Rand $\partial M'$ aus zwei Kopien von S besteht. Wenn U eine reguläre Umgebung von S ist, so erhält man aus der exakten Homologiesequenz des Paares (M,U):

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & H_3(M,U) & \to & H_2(U) & \xrightarrow{i_*} & H_2(M) & \to & H_2(M,U) & \to & H_1(U) & \to \ldots \\ & & & \cong & & & & & & \cong & \\ & & & H_2(S) & & & & & & H_1(S) & \\ & & & \cong & & & & & & = & \\ & & & \mathbb{Z} & & & & & & 0 & . \end{array}$$

Die Abbildung i_* wird von der Einbettung von S nach M induziert und bildet die 1 aus $H_2(S)$ auf $km \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ab, wenn S in $\pi_2(M,x_o)$ die Zahl $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ repräsentiert. (Es ist $H_2(M)$ ebenfalls $\mathbb{Z}$, da die erste Bettizahl von M gleich 1 und M geschlossen und orientierbar ist. Die Gruppe $H_2(M)$ besitzt nach [Sp] keine Torsion. Da V nicht nullhomolog sein kann, weil es M nicht zerlegt, muß es der Hurewicz-Homomorphismus auf eine Zahl $k \neq 0$ abbilden.)

Da i_* also injektiv ist, erhält man folgende kurze exakte Sequenz:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \underbrace{H_2(U)}_{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{i_*} & \underbrace{H_2(M)}_{\mathbb{Z}} & \to & H_2(M,U) & \to & 0 \\ & & \cup & & \cup & & & & \\ & & 1 & \longmapsto & p := km \neq 0 & & & & \end{array}$$

Daraus folgt, daß $H_2(M,U) \cong \mathbb{Z}_{|p|}$. Nach dem Ausscheidungssatz ist $H_2(M,U) \cong H_2(M\backslash\mathring{U},\ U\backslash\mathring{U}) \cong H_2(M',\partial M')$.

Mit dem universellen Koeffiziententheorem erhält man für $|p| \neq 1$:

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_1(M',\partial M');\ \mathbb{Z}_{|p|}) \to H^2(M',\partial M';\ \mathbb{Z}_{|p|}) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Hom}(H_2(M',\partial M');\ \mathbb{Z}_{|p|}) \to 0$$

$$\cong$$

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{|p|};\ \mathbb{Z}_{|p|})$$

$$\cong$$

$$\mathbb{Z}_{|p|}$$

Da λ surjektiv ist, kann $H^2(M',\partial M';\ \mathbb{Z}_{|p|})$ nicht trivial sein. Andererseits gilt aber $\pi_1(M') = 1$ (weil $\pi_1(M,x_o) = \mathbb{Z} * \pi_1(M',x_o)$ ist), also auch

$H_1(M') = 0$. Mit dem universellen Koeffiziententheorem gilt dann auch $H_1(M'; \mathbb{Z}_{|p|}) = 0$, woraus man mit einem Dualitätssatz für berandete Mannigfaltigkeiten $H^2(M', \partial M'; \mathbb{Z}_{|p|}) = 0$ folgern kann, was im Widerspruch zu dem oben abgeleiteten steht. Es muß also $|p| = 1$ und damit $km = \pm 1$ sein, woraus $m = \pm 1$ folgt. Das Element S muß also gleich $\pm V$ sein.

□

9.8 BEMERKUNG

Mit ähnlichen Methoden kann man nach einer Mitteilung von H. Hendriks allgemein für 3-Mannigfaltigkeiten zeigen, daß für ein Element S aus $\pi_2(M, x_o)$, welches durch eine nicht-nullhomotope Einbettung realisierbar ist, die Elemente mS für $m \neq 0, \pm 1$ niemals einbettbar sind.

LITERATUR

[C] Chillingworth, D.R.J.: An Algorithm for Families of Disjoint Simple Closed Curves on Surfaces, Bull. Lond. Math. Soc. 3, 23-26 (1971)

[E] Epstein, D.B.A.: Projective Planes in 3-Manifolds, Proc. Lond. Math. Soc. 11, 469-484 (1961)

[F-R] Фукс-Рабинович, Д.И.: О группах автоморфизмов свободных произведений I, Матем. сборник 8 (50), 265-276 (1940)

[H] Hempel, J.: 3-Manifolds, Annals of Mathematic Studies, Princeton University Press, (1976)

[J] Johnson, D.: Übersetzung von [F-R], (1979)

[L] Laudenbach, F.: Topologie de la dimension trois, Astérisque 12, (1974)

[M] Moise, E.E.: Affine Structures in 3-Manifolds V, The Triangulation Theorem and Hauptvermutung, Ann. of Math. 56, 37-65 (1959)

[S] Swarup, G.A.: On Embedded Spheres in 3-Manifolds, Math. Ann. 203, 89-102 (1973)

[Sp] Specker, E.: Die erste Kohomologiegruppe von Überlagerungen und Homotopieeigenschaften dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten, Comm. Math. Helv. 23, 303-333 (1949)

[Spa] Spanier, E.H.: Algebraic Topology, New York, (1966)

[Wa] Waldhausen, F.: The Word Problem in Fundamental Groups of Sufficiently Large 3-Manifolds, Ann. of Math. (2) 88, 271-280 (1968)

[W] Wicha, B.: Sphären in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, Diplomarbeit Bochum, (1978)

[Z] Zieschang, H.: Algorithmen für einfache Kurven auf Flächen I und II, Math. Skand. 17, 17-40 (1965) und 25, 49-58 (1969)

[ZVC] Zieschang, H., Vogt, E., Coldewey, D.: Surfaces and Planar Discontinuous Groups, Springer (1980)

Lebenslauf

4.3.1956	geboren in Essen als Tochter der Eheleute Agnes (geb. Köhler) und Günter Wicha
1962-1966	Besuch der Bückmannshofschule in Essen-Altenessen
1966-1973	Besuch der Luisenschule in Essen
Mai 1973	Abitur
WS 73/74	Immatrikulation an der Ruhr-Universität Bochum zum Studium der Mathematik und Physik
Juli 1978	Diplom in Mathematik
1.10.1978-31.3.1979	Beschäftigung als wissenschaftliche Hilfskraft an der Ruhr-Universität Bochum
1.4.1979-31.3.1981	Beschäftigung als Wissenschaftliche Assistentin m.d.V.b. an der Ruhr-Universität Bochum
1.4.1981-31.8.1981	Beschäftigung als wissenschaftliche Hilfskraft an der Ruhr-Universität Bochum

Druck und Verarbeitung: copy shop, darmstadt, tel. 21353